$Q=\{a+bi+cj+dk|a,b,c,d\in R\}$

$i^2=j^2=k^2=-1\quad ij=k\quad jk=i\quad ki=j$

$ji=-k\quad kj=-i\quad ik=-j$

李文亮 著

四元数矩阵

$i^2=j^2=k^2=-1\quad ij=k$

$ji=-k\quad kj=-i$

$Q=\{a+bi+cj+dk|a,b,c,d\in R\}$

$-1\quad ij=k\quad jk=i\quad ki=j$

$kj=-i\quad ik=-j$

$Q=\{a+bi+cj+dk|a,b,c,d\in R\}$

$i^2=j^2=k^2=-1\quad ij=k\quad jk=i\quad ki=j$

$ji=-k\quad kj=-i\quad ik=-j$

国防科技大学出版社

$Q=\{a+bi+cj+dk|a,b,c,d\in R\}$

责任编辑：肖 滨
封面设计：张 毅



作者简介

李文亮，湖南湘阴县人。1940年出生。1963年毕业于贵州大学数学系并支边到内蒙古，曾任教于内蒙古宁城县天义中学、赤峰师专数学系，现任教于长沙电力学院数学与计算机系。1992年晋升为教授。曾任教研室主任、校学报副主编、系总支书记等职，现任院学术委员会委员、系学术委员会主任委员等职。先后主讲数学分析、高等代数、解析几何、常微分方程、实变函数、高等数学、工程数学等10多门主干课程。主要研究领域为函数论与矩阵论。发表论文70余篇，著有《函数》、《四元数矩阵》等著作。多篇论文获校、市、省级奖，并获一项省级优秀教学成果二等奖。曾获校、市、省级优秀教师称号和师专优秀党员及院优秀党员称号，并获曾宪梓教师奖二等奖、长沙电力学院科技进步二等奖及华中电力奖教基金三等奖。其生平业绩被收入40多种大型辞书。



ISBN 7-81024-862-6/O·106
定价：18.00元

本书获得长沙电
力学院学术专著
出版基金资助

四元数矩阵

李文亮 著



国防科技大学出版社
·长沙·

内 容 简 介

本书系统地论述了四元数矩阵的理论和若干新的进展。全书共分六章。重点叙述四元数和四元数体，四元数矩阵概论，四元数矩阵的行列式，四元数矩阵的几个数值特征，四元数矩阵中的不等式，四元数体上的二次型与四元数矩阵的正定性。大部分内容是近20年来四元数矩阵研究中的新成果。

本书是国内首部有关四元数矩阵的专门著作，内容丰富，论述翔实严谨。本书可供数学工作者、工程技术人员、高等院校有关专业的高年级学生、研究生和教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

四元数矩阵/李文亮著.—长沙:国防科技大学出版社,2002.6
ISBN 7-81024-862-6

Ⅰ.四…　Ⅱ.李…　Ⅲ.矩阵—理论　Ⅳ.0151.21

国防科技大学出[illegible]版发行
电话:(0731)4572640　[illegible]编码:410073
E-mail:gfkdcbs@[illegible]cs.hn.cn
责任编辑:肖　滨　[illegible]校对:黄　煌
新华书店总店北[illegible]所经销
长沙环境保护学[illegible]厂印装

*

开本:850×1168　1/32　印张:10.75　字数:267千
2002年6月第1版第1次印刷　印数:1—1500册

*

定价:18.00元

前 言

四元数是 1843 年由英国数学家哈密顿(W.R.Hamilton)发现或者说发明的,至今已一个半世纪了。但在相当长的一段时间里它没有为人们所重视,更没有得到实际的应用。人们将复平面推广到四维空间还是近期的事。随着刚体动力学理论的发展,人们发现利用四元数和四元数矩阵可以较好地处理刚体运动学特别是刚体运动分析的理论问题和运动控制的实际问题,尤其是发现其中的旋转矩阵运算与单位四元数运算非常相似,从而使四元数方法在理论力学中开始获得应用[88]~[94]。从此,四元数日益引起人们浓厚的兴趣。在光学领域中,特别是在偏振光理论中,人们发现四元数表示也是一种新的有实用价值的方法[95]~[96]。20 世纪 70 年代以来,由于计算机图形学的发展,各学科的交叉日益频繁,使许多古老的理论,这其中也包括四元数和四元数矩阵理论又重新找到了用武之地。1985 年,四元数方法被 K.Shoemake 引入到计算机图形学[97]~[98],从此该技术在计算机动画和真实感图形绘制方面得到了广泛的应用,他提出的四元数曲线方法现在还成功地应用于刚体动力学的旋转运动模拟中。近几年来,在进行航天器姿态控制及加速度计三轴转台测试的动态误差量分析中以及飞行力学中也都开始用到了四元数和四元数矩阵的方法[99]~[101],而且该方法表现出许多优良的特性。数学的其他分支也有不少地方用到了四元数和四元数矩阵的方法,1975 年 Andesón 首先研究了四元数正态模型,从此人们在导出各种精确分布中也都应用了四元数方法[102]~[104];又如在 Riemann 对称空间的截面曲率估计问题和其他几何问题中也都应用了四元数和四元数矩阵的方法[105]~[106]。可以预见,随着科学技术的发展和计算机应用的日

益广泛和深入，四元数和四元数矩阵将会得到更广泛的应用。

从代数学观点看，实数域的代数扩域(体)只有3种：实数域、复数域及四元数体。由于四元数的乘法不满足交换律，使得对它的研究要比对实数、复数的研究困难得多，这大概也是四元数与四元数矩阵理论长期发展较慢的原因之一。但是近20年来，特别是我国的代数学领域，对四元数和四元数矩阵论的研究已经形成了一个研究热点。在20世纪80年代初，谢邦杰教授给出了四元数矩阵行列式的一种新的定义，并对四元数矩阵研究做了不少开创性的工作，激发了四元数矩阵研究的发展态势，不少学者投入到这一研究领域。特别是20世纪90年代以来，陈龙玄教授用群论的观点又给出了四元数矩阵行列式的另一种定义，并引入了四元数矩阵重行列式的概念，而使得四元数矩阵的研究进入了一个新的阶段。在这短短20多年中，四元数矩阵的研究取得了许多重要的成果。鉴于目前国内还没有见到有关四元数矩阵方面的专门著作，出于对四元数和四元数矩阵的浓厚兴趣，作者在研究的基础上，参考和综合散见于各学术期刊上有关四元数矩阵方面论文中的最新成果，撰写成本书，抛砖引玉，以期有利于同行相互交流，促进四元数矩阵研究的开展。

本书共分六章。第一章介绍四元数与四元数体。第二章讲述四元数矩阵论的基本知识和基本运算。考虑到四元数矩阵行列式定义的难度，第三章用一整章专门讲述四元数矩阵行列式和重行列式的定义及基本性质。主要叙述陈龙玄意义下的四元数矩阵行列式及重行列式的定义，并介绍了四元数矩阵行列式的其他定义以及这些定义之间的关系。第四章讲述四元数矩阵的其他数值特征，包括四元数矩阵的特征值、特征多项式和谱、四元数矩阵的秩、奇异值、迹等，并讨论了四元数自共轭矩阵的性质。第五章讲述四元数矩阵中的不等式，介绍了凸函数、双随机矩阵、控制不等式的有关知识及一些经典数值不等式，给出了有关四元数矩阵的特征

值、奇异值、迹及行列式的一系列不等式。这一章内容较多,其中有些不等式就是对于常规矩阵来说也是新的。第六章讲述了四元数体上的二次型和四元数矩阵的正定性,包括四元数正定矩阵和亚正定矩阵的性质及判定。限于篇幅,还有许多好的成果未能写进去,实为憾事。

囿于作者的水平,错漏和不妥之处在所难免,殷望批评指正。

最后,作者衷心感谢长沙电力学院学术专著出版基金委员会提供的资助。对所引用的著作和论文的作者一并深表谢意。

写完本书,正值作者62岁,感慨良多,得小词一首:

满 江 红

六十二春，弹指间，流光易逝。惊回首，往事如烟，不计得失。毕业支边内蒙古，暮岁归来逢盛世。总难忘，几度坎坷中，时正值。　体常炼，脑勤思；不气馁，莫停滞。任风云变幻，松姿挺直。卅年杏坛培桃李，一支秃笔算数字。喜余年，犹壮心未已，求真实。

这首词和本书一样,不过是为了表达作者对数学和数学教育事业的挚爱与情怀。

李文亮

2002年3月

于长沙电力学院

符 号 说 明

$a \in S$	元素 a 属于集合 S
$a \overline{\in} S$	元素 a 不属于集合 S
$S_1 \subset S_2$	集合 S_1 为集合 S_2 的子集
$S_1 \cap S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的交
$S_1 \cup S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的并
N	正整数集合
R^+	正实数集合
R	实数集合
C	复数集合
Q	四元数集合
$R^{n\times m}$	实 $n\times m$ 阶矩阵集合
$C^{n\times m}$	复 $n\times m$ 阶矩阵集合
$Q^{n\times m}$	四元数 $n\times m$ 阶矩阵集合
$U^{n\times n}$	n 阶广义酉矩阵集合
$U^{n\times k}$	$n\times k$ 广义酉矩阵集合
$SC_n(Q)$	n 阶四元数自共轭阵集合
$SC_n^-(Q)$	n 阶四元数斜自共轭阵集合
$SC_n(R)$	n 阶实对称矩阵集合
$SC_n(C)$	n 阶复厄米特(Hermite)阵集合
$SC_n^>(Q)$	n 阶四元数正定矩阵集合
$SC_n^\geqslant(Q)$	n 阶四元数半正定矩阵集合
$SC_n^>(R)$	n 阶实正定矩阵集合
$P_n^>(Q)$	n 阶四元数亚正定矩阵集合

$P_n^{\geqslant}(Q)$	n 阶四元数亚半正定矩阵集合
I_n	n 阶单位阵
$\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$	n 阶对角矩阵
$\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_s)$	准对角矩阵
A^{T}	矩阵 A 的转置
$\overline{A}$	矩阵 A 的共轭
$A^*=\overline{A^{\mathrm{T}}}=\overline{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 A 的共轭转置
A^{-1}	矩阵 A 的逆矩阵
$P(i,j)$	换法矩阵　置换矩阵
$P(i,j_\lambda)$	消法矩阵
$P(i(\lambda))$	倍法矩阵
$\dim V$	空间 V 的维数
$\det A=\lvert A\rvert$	方阵 A 的行列式
$\lVert A\rVert$	矩阵 A 的重行列式
$\mathrm{qdet}A$	方阵 A 的拟行列式
$\mathrm{tr}A$	矩阵 A 的迹
$\mathrm{rank}A$	矩阵 A 的秩
A^σ	四元数方阵 A 的导出阵
$\lambda_s(A)$	方阵 A 的第 s 个特征值
$\sigma_s(A)$	矩阵 A 的第 s 个奇异值
$(A)_{ij}$	矩阵 A 的 i 行 j 列处的元素
$R(A)$	矩阵 A 的自共轭支
$S(A)$	矩阵 A 的斜自共轭支
$\overline{q}$	数 q 的共轭数
$\lvert q\rvert$	数 q 的模
$\mathrm{Re}(q)$	数 q 的实部
$\mathrm{Im}(q)$	数 q 的虚部

$N(q)$　四元数 q 的矩或范数

$a \sim b$　四元数 a 相似于 b

$A \sim B$　矩阵 A 与矩阵 B 相似

$F_A(\lambda)$　矩阵 A 的重特征多项式

$F_A^{\alpha}(A)$　矩阵 A 的拟特征多项式

$A \otimes B$　矩阵 A 与 B 的直积，Kronecker 积

$A \circ B$　矩阵 A 与 B 的圈积，Hadamard 积

$\bigcirc_{j=1}^{m} A_j$　$A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_m$ 的缩写

$A_1 \oplus A_2$　矩阵 A_1 与 A_2 的直和

$\bigoplus_{j=1}^{m} A_j$　$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m$ 的缩写

$A > B$　A 与 B 都是自共轭阵，且 $A - B$ 是正定矩阵

$\forall$　对一切　任意

$\exists$　存在

$\Rightarrow$　蕴含或推出

$\Leftrightarrow$　充要条件，等价，当且仅当

$\square$　定理或命题证完

$\mathscr{P}(Q)$　Q 上的广义双随机矩阵集合

$\mathscr{P}_s(Q)$　Q 上的广义次双随机矩阵集合

$x \prec y$　向量 y 优于向量 x　向量 x 被 y 严控

$x \prec_w y$　向量 y 弱优于向量 x　向量 x 被 y 控制

A/A_k　矩阵 A 关于它的 k 阶顺序主子阵 A_k 的 Schur 补

目　录

第一章　四元数与四元数体

本章主要介绍四元数的概念、性质及运算，并论及与实数、复数相比较，四元数的一些特殊之处.

§1.1　四元数的定义　四元数的加法与乘法

在本书中，我们用 R 表示实数的全体，R^+ 表示正实数的全体，C 表示复数的全体.

定义 1.1.1　设

$$q=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k},a,b,c,d\in R \tag{1.1.1}$$

其中 i,j,k 满足

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1 \tag{1.1.2}$$

$$\mathrm{ij}=-\mathrm{ji}=\mathrm{k},\mathrm{jk}=-\mathrm{kj}=\mathrm{i},\mathrm{ki}=-\mathrm{ik}=\mathrm{j} \tag{1.1.3}$$

则称形为式(1.1.1)的数 q 为**四元数**，而称 a 为四元数 q 的**实部**，记为 $\mathrm{Re}(q)=a$，称 $b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$ 为 q 的**虚部**，记为 $\mathrm{Im}(q)=a\mathrm{i}+b\mathrm{j}+c\mathrm{k}$. 四元数的全体记为 Q，即

$$Q=\{a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}\mid a,b,c,d\in R\} \tag{1.1.4}$$

特别当 $c=d=0$ 时，则式(1.1.1)表示的四元数就是复数了，这时 $q=a+b\mathrm{i}\in C$. 进而当 $b=c=d=0$ 时，则式(1.1.1)表示的四元数就是实数了，这时 $q=a\in R$. 故四元数是实数和复数的扩充.

设两个四元数

$$q_1 = a_1 + b_1\mathrm{i} + c_1\mathrm{j} + d_1\mathrm{k} \in Q$$

$$q_2 = a_2 + b_2\mathrm{i} + c_2\mathrm{j} + d_2\mathrm{k} \in Q$$

则两个四元数的相等、加法与乘法分别规定如下：

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2 \tag{1.1.5}$$

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i} + (c_1 + c_2)\mathrm{j} + (d_1 + d_2)\mathrm{k} \tag{1.1.6}$$

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 = &(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) \\ &+ (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\mathrm{i} \\ &+ (a_1c_2 + a_2c_1 + b_2d_1 - d_2b_1)\mathrm{j} \\ &+ (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\mathrm{k} \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

特别，当 $q_1 = q_2 = q$ 时，有

$$q^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) + 2ab\mathrm{i} + 2ac\mathrm{j} + 2ad\mathrm{k} \tag{1.1.7$'$}$$

四元数 $q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ 的**共轭** $\bar{q}$ 定义为

$$\bar{q} = a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k} \tag{1.1.8}$$

容易验证四元数的加法满足**结合律**与**交换律**，乘法满足**结合律**，乘法对加法满足**分配律**. 但乘法不满足交换律. 事实上，我们有

$$\begin{aligned} q_2q_1 = &(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) \\ &+ (a_1b_2 + b_1a_2 - \overline{c_1d_2 - d_1c_2})\mathrm{i} \\ &+ (a_1c_2 + a_2c_1 - \overline{b_2d_1 - d_2b_1})\mathrm{j} \\ &+ (a_1d_2 + d_1a_2 - \overline{b_1c_2 - c_1b_2})\mathrm{k} \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

可见对四元数一般 $q_1q_2 = q_2q_1$ 不一定成立，但 q_1 与 q_2 中有一个是实数时，比如 $q_1 = a \in R, q_2 = q \in Q$，则有

$$aq = qa, a \in R, q \in Q$$

因为四元数乘法不满足交换律，这是四元数和四元数矩阵理论研究起来十分困难之所在.

对任意 $q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \in Q$，定义 q 的**矩**为

$$N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 0 \tag{1.1.10}$$

q 的迹为

$$T(q)=q+\bar{q}=2a. \tag{1.1.11}$$

定义四元数 q 的模为

$$|q|=\sqrt{N(q)}=\sqrt{q\bar{q}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} \tag{1.1.12}$$

而把模为 1 的四元数定义为**单位四元数**.

关于四元数的和与积的共轭有如下性质:

$$\overline{q_1+q_2}=\bar{q}_1+\bar{q}_2 \tag{1.1.13}$$

$$\overline{q_1q_2}=\bar{q}_2\bar{q}_1 \tag{1.1.14}$$

式(1.1.13)容易验证,我们来证明式(1.1.14).由式(1.1.7),有

$$\begin{aligned}\overline{q_1q_2}=&(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)\\&-(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)\mathrm{i}\\&-(a_1c_2+c_1d_2+b_2d_1-d_2b_1)\mathrm{j}\\&-(a_1d_2+c_2b_1+b_1c_2-c_1b_2)\mathrm{k}\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

又

$$\begin{aligned}\bar{q}_2\bar{q}_1&=(a_2-b_2\mathrm{i}-c_2\mathrm{j}-d_2\mathrm{k})(a_1-b_1\mathrm{i}-c_1\mathrm{j}-d_1\mathrm{k})\\&=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)\\&\quad+(-a_1b_2-b_1a_2-\overline{c_1d_2-d_1c_2})\mathrm{i}\\&\quad+(-a_1c_2-c_1a_2-\overline{b_2d_1-d_2b_1})\mathrm{j}\\&\quad+(-a_1d_2-d_1a_2-\overline{b_1c_2-b_2c_1})\mathrm{k}\\&=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)\\&\quad-(a_1b_2+b_1a_2+\overline{c_1d_2-d_1c_2})\mathrm{i}\\&\quad-(a_1c_2-c_1a_2+\overline{b_2d_1-d_2b_1})\mathrm{j}\\&\quad-(a_1d_2-d_1a_2+\overline{b_1c_2-c_1b_2})\mathrm{k}\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

比较式(1.1.15)与式(1.1.16)即得式(1.1.14).

应当特别注意,在四元数乘法中,对复数成立的公式 $\overline{q_1q_2}=\bar{q}_1\bar{q}_2$ 在四元数乘法中一般不再成立,而只成立公式(1.1.14),但当 q_1 与 q_2 中有一个是实数时,则有

$$\overline{q_1q_2}=\bar{q}_1\bar{q}_2,\text{其中 } q_1 \text{ 或 } q_2\in R \tag{1.1.17}$$

对四元数的模、矩和实部，下述公式成立：

$$|\bar{q}| = |q| \tag{1.1.18}$$

$$|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \tag{1.1.19}$$

$$N(q_1 q_2) = N(q_1)N(q_2) \tag{1.1.20}$$

$$\mathrm{Re}(q_1 + q_2) = \mathrm{Re}(q_1) + \mathrm{Re}(q_2) \tag{1.1.21}$$

$$\mathrm{Re}(q_1 q_2) = \mathrm{Re}(q_2 q_1) \tag{1.1.22}$$

$$|q_1 + q_2| \leqslant |q_1| + |q_2| \tag{1.1.23}$$

式(1.1.23)中等号成立当且仅当$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \lambda \geqslant 0$，这时 $q_1 = a_1 + b_1\mathrm{i} + c_1\mathrm{j} + d_1\mathrm{k}, q_2 = a_2 + b_2\mathrm{i} + c_2\mathrm{j} + d_2\mathrm{k}$ 称为**同向平行**.

$$2|q_1 q_2| \leqslant |q_1|^2 + |q_2|^2 \tag{1.1.24}$$

又当 $q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \in Q$ 时，还有

$$q + \bar{q} = 2a \tag{1.1.25}$$

$$\mathrm{i}q - q\mathrm{i} = 2b \tag{1.1.26}$$

$$\mathrm{j}q - q\mathrm{j} = 2c \tag{1.1.27}$$

$$\mathrm{k}q - q\mathrm{k} = 2d \tag{1.1.28}$$

另外，式(1.1.19)～(1.1.23)均可推广到任意有限多个的情形.

命题 1.1.1 设 $q_t = a_t + b_t\mathrm{i} + c_t\mathrm{j} + d_t\mathrm{k} \in Q, t = 1, \cdots, n$，则

$$\left|\sum_{t=1}^{n} q_t\right| \leqslant \sum_{t=1}^{n} |q_t| \tag{1.1.29}$$

证 由柯西(Cauchy)不等式，有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{t=1}^{n} q_t\right|^2 &= \left(\sum_{t=1}^{n} a_t\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{n} b_t\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{n} c_t\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{n} d_t\right)^2 \\ &= \left(\sum_{t=1}^{n} a_t\right)\left(\sum_{s=1}^{n} a_s\right) + \left(\sum_{t=1}^{n} b_t\right)\left(\sum_{s=1}^{n} b_s\right) \\ &\quad + \left(\sum_{t=1}^{n} c_t\right)\left(\sum_{s=1}^{n} c_s\right) + \left(\sum_{t=1}^{n} d_t\right)\left(\sum_{s=1}^{n} d_s\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(|a_t a_s| + |b_t b_s| + |c_t c_s| + |d_t d_s|)$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(a_t^2 + b_t^2 + c_t^2 + d_t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot (a_s^2 + b_s^2 + c_s^2 + d_s^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{t=1}^{n}|q_t|\right)^2$$

上式两边开平方,即得式(1.1.29). □

对四元数来说,阿贝尔变换仍成立,即有如下

命题 1.1.2 设 $a_s, b_s \in Q, s=1,\cdots,n$,则有

$$\sum_{s=1}^{n} a_s b_s = \sum_{s=1}^{n-1}(a_s - a_{s-1})\sum_{t=1}^{s} b_t + a_n \sum_{t=1}^{n} b_t \quad (1.1.30)$$

命题 1.1.3 设 $a_s, b_s, c_s \in Q, s=1,\cdots,n$,若 $|c_1| \geqslant \cdots \geqslant |c_n|$ 且

$$\sum_{s=1}^{k}|b_s| \leqslant \sum_{s=1}^{k}|a_s|, k = 1,\cdots,n \qquad (1.1.31)$$

则

$$\left|\sum_{s=1}^{k} c_k b_k\right| \leqslant \sum_{s=1}^{k}|c_k b_k| \leqslant \sum_{s=1}^{k}|c_s||a_s|, k=1,\cdots,n$$

$$(1.1.32)$$

证 由式(1.1.29)即知式(1.1.32)的第一部分成立,故只须证明当 $k\geqslant 2$ 时式(1.1.32)的第二部分成立即可.由式(1.1.30)及(1.1.31),有

$$\sum_{s=1}^{k}|c_s b_s| = \sum_{s=1}^{k}|c_s||b_s|$$

$$= \sum_{s=1}^{k}(|c_s| - |c_{s+1}|)\sum_{t=1}^{s}|b_t| + |c_k|\sum_{t=1}^{k}|b_t|$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{k}(|c_s| - |c_{s+1}|)\sum_{t=1}^{s}|a_t| + |c_k|\sum_{t=1}^{k}|a_t|$$

$$= \sum_{s=1}^{k} |c_k| |a_k|, \ k=1,\cdots,n \qquad \square$$

注 式(1.1.31),(1.1.32)在证明有关的不等式时常被用到.

§1.2 四元数的乘幂 四元数的三角形式及指数形式

一、四元数的倒数与商

定义 1.2.1 设 $q\in Q$,若存在 $p\in Q$,使得

$$qp = pq = 1 \tag{1.2.1}$$

则称四元数 p 为四元数 q 的**倒数或逆元**,记为 q^{-1},即有

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1 \tag{1.2.1$'$}$$

命题 1.2.1 四元数 q 存在倒数的充要条件是 $q\neq 0$,且 q 的倒数 q^{-1}是唯一的,并有

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \tag{1.2.2}$$

证 先证必要性,即证当 q^{-1}存在时必有 $q\neq 0$. 用反证法,假设 $q=0$,则对任意 $p\in Q$,都有 $qp = pq = 0$,可见这时 q^{-1}不存在,与已知矛盾.必要性获证.

再证充分性,设 $q\neq 0$,令

$$p = \frac{\bar{q}}{|q|^2}, \qquad ①$$

则

$$pq = qp = 1 \qquad ②$$

故 q 存在倒数.

最后证倒数的唯一性.设 q 还有另一倒数 p_1,则亦有

$$p_1 q = qp_1 = 1 \qquad ③$$

于是由式②,③得,$qp_1 - qp = 0$ 即 $q(p_1 - p) = 0$,因 q 存在倒数,

由刚证明的必要性知，$q\neq0$，从而有 $p_1-p=0$，即 $p_1=p$. 唯一性获证.

由式①，②即知

$$q^{-1}=\frac{\bar{q}}{|q|^2}$$ □

推论 设 $q\in Q$，若存在 $p\in Q$，使得

$$qp=1(\text{或 } pq=1) \tag{1.2.1$''$}$$

则

$$p=q^{-1}$$

证 由 $qp=1$，则 $q\neq0$，由命题 1.2.1 知，q^{-1}存在. 于是有

$$p=1\cdot p=(q^{-1}q)p=q^{-1}(qp)=q^{-1}\cdot1=q^{-1}$$

同理可证，当 $pq=1$ 时，亦有 $p=q^{-1}$. □

注 由推论知，要判断一个四元数是否存在倒数，可用式(1.2.1)″代替(1.2.1)进行判断.

命题 1.2.2 设 $q_1,q_2\in Q$，且 $q_1\neq0$，$q_2\neq0$，则有

$$(q_1q_2)^{-1}=q_2^{-1}q_1^{-1} \tag{1.2.3}$$

证 由式(1.2.2)，(1.1.14)，(1.1.12)，有

$$(q_1q_2)^{-1}=\frac{\overline{q_1q_2}}{|q_1q_2|^2}=\frac{\overline{q_1q_2}}{q_1q_2\,\overline{q_1q_2}}=\frac{\bar{q}_2\bar{q}_1}{q_1|q_2|^2\bar{q}_1}$$

$$=\frac{\bar{q}_2\bar{q}_1}{|q_2|^2q_1\bar{q}_1}=\frac{\bar{q}_2}{|q_2|^2}\cdot\frac{\bar{q}_1}{|q_1|^2}=q_2^{-1}q_1^{-1}$$ □

定义 1.2.2 设 $q_1,q_2\in Q$ 且 $q_2\neq0$，则称 $q_1q_2^{-1}$ 为 q_1 与 q_2 的右商，$q_2^{-1}q_1$ 为 q_1 与 q_2 的左商.

命题 1.2.3 设 $q\in Q$，若 $q\neq0$，则

$$\bar{q}^{-1}=\overline{q^{-1}} \tag{1.2.4}$$

证 因 $q\neq0$，由命题 1.2.1 知，q^{-1}存在，且

$$q^{-1}q=1\Rightarrow\overline{q^{-1}q}=1\text{，即 }\bar{q}\,\overline{q^{-1}}=1$$

由命题 1.2.1 之推论即知

$$\bar{q}^{-1}=\overline{q^{-1}}$$ □

二、四元数的乘幂

设　$q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \in Q$，　$a, b, c, d \in R$

记
$$x = b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \tag{1.2.5}$$
则
$$x^2 = -(b^2 + c^2 + d^2)$$
于是
$$x^{2n} = (x^2)^n = (-1)^n (b^2 + c^2 + d^2)^n$$
次令
$$h = |x| = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \tag{1.2.6}$$
则
$$x^{2n} = (-1)^n h^{2n}$$
由式(1.1.10)知 $ax = xa$ 成立，则由二项式定理有

$$\begin{aligned} q^n &= (a + x)^n \\ &= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + \cdots + C_n^n x^n \\ &= (C_n^0 a^n + C_n^2 a^{n-2} x^2 + \cdots + C_n^{2k} a^{n-2k} x^{2k} + \cdots) \\ &\quad + x(C_n^1 a^{n-1} + C_n^3 a^{n-3} x^2 + \cdots + C_n^{2k+1} a^{n-2k-1} x^{2k} + \cdots) \end{aligned}$$

即得四元数的乘幂公式：

$$\begin{aligned} q^n = {} & [C_n^0 a^n - C_n^2 a^{n-2} h^2 + \cdots + (-1)^k C_n^{2k} a^{n-2k} h^{2k} + \cdots] \\ & + (b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k})[C_n^1 a^{n-1} - C_n^3 a^{n-3} h^2 + \cdots \\ & + (-1)^k C_n^{2k+1} a^{n-2k-1} h^{2k} + \cdots] \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

其中　$n \in N, h = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$.　　(1.2.8)

三、四元数的三角形式和指数形式

设 $q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \in Q$，且其中 b, c, d 中至少有一个不为零，则

$$\begin{aligned} q &= a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \\ &= a + h\left(\frac{b}{h}\mathrm{i} + \frac{c}{h}\mathrm{j} + \frac{d}{h}\mathrm{k}\right) \\ &= |q| \left[\frac{a}{|q|} + \frac{h}{|q|}\left(\frac{b}{h}\mathrm{i} + \frac{c}{h}\mathrm{j} + \frac{d}{h}\mathrm{k}\right) \right] \end{aligned}$$

即
$$q = |q|(u + v\mathrm{I}) \tag{1.2.9}$$

其中
$$u=\frac{a}{|q|}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}} \tag{1.2.10}$$

$$v=\frac{h}{|q|}=\frac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}} \tag{1.2.11}$$

$$\mathrm{I}=\frac{b}{h}\mathrm{i}+\frac{c}{h}\mathrm{j}+\frac{d}{h}\mathrm{k} \tag{1.2.12}$$

易知有
$$u^2+v^2=1, \mathrm{I}^2=-1 \tag{1.2.13}$$

故可令
$$u=\cos\theta, v=\sin\theta \tag{1.2.14}$$

从而 $q=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}(bcd\neq 0)$可写成如下三角式
$$q=|q|(\cos\theta+\mathrm{I}\sin\theta) \tag{1.2.15}$$

其中 $$\mathrm{I}=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}(b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k})=\frac{1}{h}(b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}) \tag{1.2.16}$$

$$\theta=\arctan\frac{v}{u}=\arctan\frac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{a}=\arctan\frac{h}{a} \tag{1.2.17}$$

类比复数的三角形式,我们把式(1.2.15)称为四元数的**三角形式**.

显然对于同一个 I,式(1.2.15)具有类似于复数的所有性质.例如,因此可以得出四元数的另一乘幂公式及方根公式:

$$q^n=|q|^n(\cos n\theta+\mathrm{I}\sin n\theta) \tag{1.2.18}$$

$$\sqrt[n]{q}=\sqrt[n]{|q|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{I}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), k=0,1,2,\cdots,n \tag{1.2.19}$$

不难看出,运用公式(1.2.18)来求四元数的乘幂比用公式(1.2.7)更方便些.

公式(1.2.14)~(1.2.19)对不为零的所有四元数成立,当然对一切不为零的实数也成立,而且从公式(1.2.19)还可以看出:

1)当 q 是非实数的四元数时,$\sqrt[n]{q}$有 n 个四元数值;

2)当 q 是非零四元数时,$\sqrt[n]{q}$有无穷多个四元数值,因为这时 $\theta=0$或 π,而 I 取满足 $b^2+c^2+d^2=1$ 的一切形如 $b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$ 的四元数.

又注意到，由式(1.2.13)有

$$\mathrm{I}^2=-1,\quad \mathrm{I}^3=-\mathrm{I},\quad \mathrm{I}^4=1,\cdots \tag{1.2.20}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{I}\theta} &= 1+\mathrm{I}\theta+\frac{\mathrm{I}^2}{2!}\theta^2+\frac{\mathrm{I}^3}{3!}\theta^3+\cdots+\frac{\mathrm{I}^n}{n!}\theta^n+\cdots \\
&= 1-\frac{1}{2!}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4+\cdots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}\theta^{2k}+\cdots+\mathrm{I}\Big[\theta-\frac{1}{3!}\theta^3 \\
&\quad +\frac{1}{5!}\theta^5+\cdots+\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\theta^{2k-1}+\cdots\Big] \\
&= \cos\theta+\mathrm{I}\sin\theta
\end{aligned} \tag{1.2.21}$$

从而对四元数 $q=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}(bcd\neq 0)$ 又可写成如下**指数形式**：

$$q=|q|\mathrm{e}^{\mathrm{I}\theta}, \tag{1.2.22}$$

其中 I 如式(1.2.16)所示，θ 如式(1.2.17)所示.

§1.3 四元数的复数表示 四元数的相似关系

一、四元数的复数表示

设 $q\in Q$，即 $q=a_1+a_2\mathrm{i}+a_3\mathrm{j}+a_4\mathrm{k}$，$a_1,a_2,a_3,a_4\in R$
注意到 $\mathrm{ij}=\mathrm{k}$，则 q 可唯一地表示为

$$q=(a_1+a_2\mathrm{i})+(a_3+a_4\mathrm{i})\mathrm{j} \tag{1.3.1}$$

于是令 $z_1=a_1+a_2\mathrm{i}, z_2=a_3+a_4\mathrm{i}$，则 q 可唯一地表示为

$$q=z_1+z_2\mathrm{j},\quad z_1,z_2\in C,\quad \mathrm{j}^2=-1 \tag{1.3.2}$$

式(1.3.2)称为**四元数的复数表示**.

命题 1.3.1 设四元数 q 的复数表示为式(1.3.2)，则

$$|q|=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2} \tag{1.3.3}$$

$$\bar{q}=\overline{z_1}-z_2\mathrm{j} \tag{1.3.4}$$

$$q^{-1}=\frac{1}{|q|^2}(\overline{z_1}-z_2\mathrm{j}) \tag{1.3.5}$$

证 我们有

$$\begin{aligned}\bar{q}&=a_1-a_2\mathrm{i}-a_3\mathrm{j}-a_4\mathrm{k}\\&=(a_1-a_2\mathrm{i})-(a_3+a_4\mathrm{i})\mathrm{j}=\bar{z}_1-z_2\mathrm{j}\end{aligned}$$

故式(1.3.4)成立.式(1.3.5)可由式(1.3.4)立得,而式(1.3.3)是显然的. □

命题 1.3.2 对于 $\forall z\in C$,有

$$\mathrm{j}z=\bar{z}\mathrm{j} \tag{1.3.6}$$

$$\overline{z\mathrm{j}}=-z\mathrm{j} \tag{1.3.7}$$

证 设 $z=a+b\mathrm{i}, a, b\in R$,则

$$\begin{aligned}\mathrm{j}z&=\mathrm{j}(a+b\mathrm{i})=\mathrm{j}a+\mathrm{j}b\mathrm{i}\\&=a\mathrm{j}+b\mathrm{ji}\\&=a\mathrm{j}-b\mathrm{ij}\\&=(a-b\mathrm{i})\mathrm{j}\\&=\bar{z}\mathrm{j}\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\overline{z\mathrm{j}}=\bar{\mathrm{j}}\bar{z}&=-\mathrm{j}(a-b\mathrm{i})=-a\mathrm{j}+b\mathrm{ji}\\&=-a\mathrm{j}-b\mathrm{ij}\\&=-(a+b\mathrm{i})\mathrm{j}\\&=-z\mathrm{j}\end{aligned}$$

□

二、四元数的数量—向量表示法

设 $\forall q\in Q$,并设

$$q=a_0+a_1\mathrm{i}+a_2\mathrm{j}+a_3\mathrm{k} \tag{1.3.8}$$

引入表示法

$$q=S_q+V_q \tag{1.3.9}$$

$$S_q=a_0 \tag{1.3.10}$$

$$V_q=a_1\mathrm{i}+a_2\mathrm{j}+a_3\mathrm{k} \tag{1.3.11}$$

其中 S_q 即四元数 q 的实部，又称为四元数 q 的**数量部分**，V_q 为四元数 q 的**虚部**，又称为四元数 q 的**向量部分**．这种表示法一般称为四元数的**数量—向量表示**．

利用三维向量空间的数量积（点积）与向量积（叉积），我们得到四元数乘积的另一种表示形式：

命题 1.3.3 设 $p = S_p + V_p, q = S_q + V_q \in Q$，则

$$
\begin{aligned}
pq &= (S_p + V_p)(S_q + V_q) \\
&= S_pS_q - V_p \cdot V_q + S_pV_q + S_qV_p + V_p \times V_q
\end{aligned}
\tag{1.3.12}
$$

证 设

$$p = a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}$$

$$q = b_0 + b_1\mathrm{i} + b_2\mathrm{j} + b_3\mathrm{k}$$

则由式(1.1.7)，有

$$
\begin{aligned}
pq = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \\
+ (a_0b_1 + b_0a_1 + a_2b_3 - a_3b_2)\mathrm{i} \\
+ (a_0b_2 + b_0a_2 + b_1a_3 - b_3a_1)\mathrm{j} \\
+ (a_0b_3 + b_0a_3 + a_1b_2 - b_1a_2)\mathrm{k}
\end{aligned}
$$

而式(1.3.12)的

$$
\begin{aligned}
\text{右边} &= a_0b_0 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
&\quad + a_0(b_1\mathrm{i} + b_2\mathrm{j} + b_3\mathrm{k}) \\
&\quad + b_0(a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}) \\
&\quad + (a_2b_3 - b_2a_3)\mathrm{i} \\
&\quad - (a_1b_3 - b_1a_3)\mathrm{j} \\
&\quad + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathrm{k} \\
&= a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \\
&\quad + (a_0b_1 + b_0a_1 + a_2b_3 - a_3b_2)\mathrm{i} \\
&\quad + (a_0b_2 + b_0a_2 + b_1a_3 - b_3a_1)\mathrm{j} \\
&\quad + (a_0b_3 + b_0a_3 + a_0b_2 - b_1a_2)\mathrm{k}
\end{aligned}
$$

故式(1.3.12)成立． □

三、四元数的相似关系和相合关系

定义 1.3.1 设 a,b 为任意的两个四元数，若存在非零的四元数 x，使得

$$xax^{-1}=b \tag{1.3.13}$$

则称四元数 a 与 b 是**同类的**或称四元数 a 与 b **相似**，记为 $a\sim b$.

显然四元数的相似关系是一种等价关系.通过计算可知有：

命题 1.3.4 $a,b\in Q$，则

$$a\sim b\Leftrightarrow S_a=S_b \text{ 且 } |V_a|=|V_b| \tag{1.3.14}$$

其中 $|V_a|$，$|V_b|$ 分别表示向量 V_a，V_b 的模.

命题 1.3.5 $a,b\in Q$，$a\sim b$ 且 $xax^{-1}=b$，则对任意整数 k，有

$$xa^kx^{-1}=b^k \tag{1.3.15}$$

证 因 $b=xax^{-1}$，则

$$b^2=(xax^{-1})(xax^{-1})=xa(x^{-1}x)ax^{-1}=xa^2x^{-1}$$

由数学归纳法可知对任意正整数 k，式(1.3.15)成立.

又由式(1.2.3)有

$$b^{-1}=(xax^{-1})^{-1}=xa^{-1}x^{-1},\quad \text{故有}$$

$$b^{-k}=(b^{-1})^k=(xa^{-1}x^{-1})=x(a^{-1})^kx=xa^{-k}x^{-1}$$

这就证明了，对所有整数 k，式(1.3.15)成立. □

命题 1.3.6 设 $a,c\in Q$，$a\sim c$ 且 $a\neq 0$，则有

$$(a-c)a(a-c)^{-1}=\bar{c} \tag{1.3.16}$$

证 式(1.3.16)等价于

$$(a-c)a=\bar{c}(a-c)$$

因 $a\sim c$，由命题 1.3.4 有 $S_a=S_c$，于是上式变成

$$(V_a-V_c)(S_a+V_a)=(S_c-V_c)(V_a-V_c)$$

即

$$S_aV_a-S_aV_c+V_a\cdot V_a-V_c\cdot V_a$$

$$= S_c V_a - S_c V_c - V_c \cdot V_a + V_c \cdot V_c$$

即 $$S_a V_a - S_a V_c + V_a \cdot V_a = S_c V_a - S_c V_c + V_c \cdot V_c \qquad (1.3.17)$$

由命题 1.3.4 知， $S_a = S_c$ 且 $V_a \cdot V_a = V_c \cdot V_c$

故式(1.3.17)成立，从而式(1.3.16)成立. □

命题 1.3.7 设 $q = a_1 + a_2\mathrm{i} + a_3\mathrm{j} + a_4\mathrm{k}$ 为任意四元数，则必存在一复数

$$z = a_1 + h\mathrm{i}, \quad h \geqslant 0 \qquad (1.3.18)$$

使得 $q \sim z$.

证 设四元数

$$q = a_1 + a_2\mathrm{i} + a_3\mathrm{j} + a_4\mathrm{k}, a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$$

q 的复数表示为

$$q = z_1 + z_2\mathrm{j}, \quad z_1 = a_1 + a_2\mathrm{i}, \quad z_2 = a_3 + a_4\mathrm{i} \in C$$

当 $a_3 = a_4 = 0$ 时，$q = a_1 + a_2\mathrm{i} \in C$，若 $a_2 \geqslant 0$，则取 $x = 1$，于是有 $xqx^{-1} = q$，即取 $z = q$，使 $q \sim z$；若 $a_2 < 0$，则取 $x = \mathrm{j}$，有 $xqx^{-1} = a_1 - a_2\mathrm{i} \sim q$，其中 $h = -a_2 > 0$.

当 a_3 与 a_4 不全为零时，我们试图取如下形式的四元数：

$$x = a_0\mathrm{i} + a_3\mathrm{j} + a_4\mathrm{k}$$

其中 a_0 待定.

令
$$\left.\begin{aligned} z_0 &= a_0\mathrm{i}, \quad \bar{z}_0 = -a_0\mathrm{i} \\ z_1 &= a_1 + a_2\mathrm{i}, \quad \bar{z}_1 = a_1 - a_2\mathrm{i} \\ z_2 &= a_3 + a_4\mathrm{i}, \quad \bar{z}_2 = a_3 - a_4\mathrm{i} \end{aligned}\right\} \qquad (1.3.19)$$

则有
$$x = z_0 + z_2\mathrm{j}$$

由式(1.3.4)有

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2} = \frac{1}{|x|^2}(\bar{z}_0 - z_2\mathrm{j})$$

于是有

$$xqx^{-1} = \frac{1}{|x|^2}(z_0 + z_2\mathrm{j})(z_1 + z_2\mathrm{j})(\bar{z}_0 - z_2\mathrm{j})$$

$$=\frac{1}{|x|^2}\{[(z_0z_1-z_2\bar{z}_2)\bar{z}_0-(z_0\bar{z}_1-z_0z_2)\bar{z}_2]$$
$$+[(z_2\bar{z}_1+z_0z_2)z_0-(z_0z_1-z_2\bar{z}_2)z_2]\mathrm{j}\}$$
$$=\frac{1}{|x|^2}[(|z_0|^2z_1-|z_2|^2\bar{z}_0-|z_2|^2\bar{z}_1+|z_2|^2z_0)$$
$$+(\bar{z}_1z_0+z_0^2-z_1z_0+|z_2|^2)z_2\mathrm{j}]$$
$$=\frac{1}{|x|^2}\{[|z_0|^2z_1+|z_2|^2(z_0-\bar{z}_0-\bar{z}_1)]$$
$$+[(\bar{z}_1-z_1)z_0+z_0^2+|z_2|^2]z_2\mathrm{j}\} \tag{1.3.20}$$

要使 $xqx^{-1}\in C$,则必须有

$$(\bar{z}_1-z_1)z_0+z_0^2+|z_2|^2=0$$

即
$$(-2a_2\mathrm{i})(a_0\mathrm{i})+(a_0\mathrm{i})^2+a_3^2+a_4^2=0$$

即
$$-a_0^2+2a_2a_0+a_3^2+a_4^2=0$$

即
$$a_0^2-2a_2a_0-(a_3^2+a_4^2)=0$$

故
$$a_0=\frac{2a_2\pm\sqrt{4a_2^2+4a_3^2+4a_4^2}}{2}(\text{舍去负值})$$
$$=a_2+\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}=a_2+h \tag{1.3.21}$$

于是,由式(1.3.21),(1.3.19),有

$$z=xa'x^{-1}=a_1+\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}\mathrm{i}$$
$$=a_1+h\mathrm{i},h=\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}>0 \tag{1.3.22}$$

而
$$x=(a_2+h)\mathrm{i}+a_2\mathrm{j}+a_4\mathrm{k}\in Q \tag{1.3.23}$$

$$x^{-1}=-\frac{1}{2h}\mathrm{i}-\frac{a_3}{2h(a_2+h)}\mathrm{j}-\frac{a_4}{2h(a_2+h)}\mathrm{k}\in Q \tag{1.3.24}$$

这就完全证明了命题 1.3.7. □

定义 1.3.2 我们称(1.3.18)中的复数 $\dot{q}=a_1+h\mathrm{i}$(其中 $h\geqslant 0$)为**相似类**

$$\{q\}=\{b\mid b=xqx^{-1},q=a_1+a_2\mathrm{i}+a_3\mathrm{j}+a_4\mathrm{k},\forall x\in Q\}$$

的**主值**.

定义 1.3.3 设 $a,b\in Q$,若存在一个非零的元素 $x\in Q$,使得

$$\bar{x}ax=b \tag{1.3.25}$$

则称四元数 a 与 b **相合**.

由命题 1.3.7 及式(1.2.3)可直接推得如下

命题 1.3.8 设 $\forall a\in Q$,则存在数 $y\in C$,使得 a 与 y 相合.

证 由命题 1.3.7,存在 $0\neq x\in Q$ 和 $z\in C$ 使得

$$xax^{-1}=z$$

由式(1.2.2)有 $xa\dfrac{\bar{x}}{|x|^2}=z$,即 $xa\bar{x}=|x|^2z$.

令

$$y=|x|^2z\in C$$

于是知,存在 $y\in C$,使得

$$xa\bar{x}=y$$

故命题 1.3.8 得证. □

§1.4 四元数体

在本节我们给出群、环、域、体的定义,重点介绍置换群和四元数体.

定义 1.4.1 设 G 为一非空集合,对 G 的元素规定一个代数运算,称之为乘法(或加法),乘积记作 ab(或 $a+b$),若其满足下列条件,则称 G 为一个群:

1° 满足封闭性:对 $\forall a,b\in G$,$\exists$唯一的 $c\in G$,使 $ab=c$;

2° 结合律成立,对 $\forall a,b,c\in G$ 有

$$(ab)c=a(bc)$$

3° G 存在单位元 e 满足:对 $\forall a\in G$,有

$$ae=ea=a$$

4° 对 $\forall a\in G$,$\exists a$ 的逆元 $a^{-1}\in G$,使得

$$aa^{-1}=a^{-1}a=e$$

例如,全体整数 Z 对于数的加法作成一个加法群.全体实数 R,全体复数 C 对于数的加法也各自作成一个群.

为了后面(第二章)定义四元数矩阵的行列式的需要,这里重点介绍一下置换群.

不失一般性,假设 n 个整数 $1,2,\cdots,n$ 之间的一种置换,如数 1 用 1 到 n 中的某个数 i_1 取代,2 被 1 到 n 中的某个数 i_2 取代,$\cdots$,n 被 1 到 n 中的某个数 i_n 取代,表以

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

例如

$$p_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad p_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

并规定

$$\begin{aligned} p_1p_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

这表示先作 p_1 的置换,接着作 p_2 的置换,即 $1\xrightarrow{p_1}3\xrightarrow{p_2}2$, $2\xrightarrow{p_1}1\xrightarrow{p_2}4$, $3\xrightarrow{p_1}2\xrightarrow{p_4}3$, $4\xrightarrow{p_1}4\xrightarrow{p_2}1$

故
$$p_1p_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

类似有

$$\begin{aligned} p_2p_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$$

可见
$$p_1p_2\neq p_2p_1$$

可以证明，1,2,…,n 间的置换集合，在上面定义的乘法运算下构成一个群：

1° 封闭性

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}$$

2° 结合律

$$\left[\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}$$

故结合律成立.

3° 单位元素 e 为 $e=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}$.

4° 逆元素

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}$$

实因

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}=e$$

这就证明了 n 次置换的全体对于上面规定的乘法运算构成

一个群，叫做 n **次置换群**，又叫 n **次对称群**，记为 S_n. 由上面的讨论知，置换群 S_n 是非交换群.

为了以后讨论方便起见，我们引入一种特殊形式的置换——**循环置换**.

设 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中任意 m 个不同的数字. 如果 n 次置换 p 把 i_1 换成 i_2，i_2 换成 i_3，$\cdots$，i_{m-1} 换为 i_m，最后 i_m 换为 i_1，而其余的各个数字不变，则称 p 为 m **阶循环置换**或**循环**或**轮换**，记为

$$p=(i_1\ i_2 \cdots\ i_m)$$

特别当 $m=2$ 时，循环 $(i_1\ i_2)$ 称为**对换**或**换位**. 例如 5 个文字 1,2,3,4,5 的置换

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&5&2\end{pmatrix}=(1\ 4\ 5\ 2\ 3)$$

$$\begin{pmatrix}1&4&5\\5&4&1\end{pmatrix}=(1\ 5\ 4)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2)(4\ 5)$$

循环 $(1\ 5\ 4)$ 中，2，3 不出现，表示 2 和 3 保持不变，即

$$(1\ 5\ 4)=(1\ 5\ 4)(2)(3)$$

注意，循环 $(i_1\ i_2 \cdots i_m)$ 实际上只与元素的相邻状况有关，而与哪个元素为首无关，比如 $(1\ 2\ 3)=(2\ 3\ 1)$. 如若两个循环 $(i_1\ i_2 \cdots i_m)$ 与 $(j_1\ j_2\ j_3 \cdots j_l)$ 没有相同的文字，则称为是**不相交**的. 不相交的两个循环的乘积可交换. 例如 $(1\ 3\ 2)(4\ 5)=(4\ 5)(1\ 3\ 2)$. 另外，若 $p=(i_1\ i_2 \cdots\ i_m)$，则 $p^n=(1)(2)\cdots(n)=e$.

一般我们有：

命题 1.4.1 每一个置换都可以唯一地表示为两个不相交的循环的乘积.

我们略去这个命题的证明.

定义 1.4.2 称一个 n 次置换 σ 的循环表示写为**正规式**,如果

$$\sigma=(n_1 i_1 i_3 \cdots i_s)(n_2 j_2 j_3 \cdots j_t)\cdots(n_r k_2 k_3 \cdots k_l) \quad (1.4.1)$$

$$n_1<i_2,\cdots,i_s;n_2<j_2,\cdots j_t;\cdots;n_r<k_2,\cdots,k_l \quad (1.4.2)$$

$$1=n_1<n_2<\cdots<n_r\leqslant n \quad (1.4.3)$$

或者式(1.4.2),式(1.4.3)代以如下式(1.4.2)′,式(1.4.3)′

$$n_1>i_2,\cdots,i_s;n_2>j_2,\cdots,j_t;n_r>k_2,\cdots,k_l \quad (1.4.2)'$$

$$n=n_1>n_2>\cdots>n_r\geqslant 1 \quad (1.4.3)'$$

定义 1.4.3 设 G 为一非空集合,对 G 的元素规定两种代数运算加法和乘法,若满足下列三个条件,则称 G 为一个**环**:

1° G 是一个加法群;

2° 对乘法满足结合律,即 $\forall a,b,c\in G$,有

$$a(bc)=(ab)c$$

3° 对加法和乘法满足左、右分配律,即对 $\forall a,b,c\in G$,有

$$a(b+c)=ab+ac,(b+c)a=ba+ca$$

定义 1.4.4 一个具有单位元的交换环 G,若至少含有一个非零元,并且每个非零元 a 恒有逆元 a^{-1},则称 G 为一个**域**.

定义 1.4.5 一个具有单位元的非交换环 G,称为**非交换环**,或称为**除环**,有时也称为**体**.

例 对数的加法和乘法来说,实数集和复数集均构成域,分别称为**实数域**和**复数域**,并分别记为 R 和 C,而对四元数集则不构成域,因为它是非交换环,故一般称为**四元数体**,记为 Q.

在有些书(如张禾瑞著《近世代数基础》)中把所有复数对的集合 $\Omega=\{(\alpha,\beta)\mid \alpha,\beta$为复数$\}$当规定相等、加法、乘法:

$$(\alpha_1,\beta_1)=(\alpha_2,\beta_2)\overset{\triangle}{\Leftrightarrow}\alpha_1=\alpha_2,\beta_1=\beta_2$$

$$(\alpha_1,\beta_1)+(\alpha_2,\beta_2)\overset{\triangle}{=\!=}(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)$$

$$(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2,\beta_2)\overset{\triangle}{=\!=}(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\bar{\beta}_2,\alpha_1\beta_1+\beta_1\bar{\alpha}_2)$$

则称 Ω 为四元数体.

命题1.4.2 上述 Ω 亦作成一个除环(体),且 Ω 与 Q 同构.

证 Ω 作成一个除环容易验证.下面证 Ω 与 Q 同构.

$\varphi:(a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i})\to a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$,这里前面的 i 与后面的 i 有区别.

$$\begin{aligned}
&\varphi[(a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i})+(a'+b'\mathrm{i},c'+d'\mathrm{i})]\\
=&\varphi[(a+a')+(b+b')\mathrm{i},(c+c')+(d+d')\mathrm{i}]\\
=&(a+a')+(b+b')\mathrm{i}+(c+c')\mathrm{j}+(d+d')\mathrm{k},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi[(a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i})(a'+b'\mathrm{i},c'+d'\mathrm{i})]\\
=&\varphi[(aa'-bb'-cc'-dd')+(ab'+ba'+cd'-dc')\mathrm{i},\\
&(ac'-bd'+ca'+db')+(ad'+bc'-cb'+da')\mathrm{i}]\\
=&aa'-bb'-cc'-dd'+(ab'+ba'-cd'-dc')\mathrm{i}\\
&+(ac'-bd'+ca'+db')\mathrm{j}+(ad'+bc'-cb'+da')\mathrm{k}\\
=&(a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k})(a'+b'\mathrm{i}+c'\mathrm{j}+d'\mathrm{k})\\
=&\varphi(a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i})\varphi(a'+b'\mathrm{i},c'+d'\mathrm{i})
\end{aligned}$$

故在 φ 之下 Ω 与 Q 同构. □

两个除环同构,除记号外构造完全一样,故可看成是相同的除环,都称为四元数除环或四元数体.

第二章　四元数矩阵概论

以四元数为元素的矩阵,称之为四元数矩阵,或称为四元数体上的矩阵.由于四元数是实数和复数的扩充,故四元数矩阵是包括实矩阵和复矩阵作为其特款的更广泛、更一般的矩阵.实数域 R 和复数域 C 上的矩阵即所谓常规矩阵的运算及其性质大部分可以推广到四元数矩阵上来,但因四元数的乘法不满足交换律,而使得常规矩阵的诸多性质不能直接推广到四元数矩阵上来.这也就是研究四元数矩阵的困难之所在,特别是行列式的定义更为困难,我们将在第三章专门来讨论它.这一章主要论及四元数矩阵的一些基本概念和基本运算及一些符号.

§2.1　四元数矩阵的基本知识

一、四元数矩阵的基本运算及其性质

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}, a_{ij}\in Q$,则称 A 为**四元数矩阵**. $m\times n$ 阶四元数矩阵的全体记为 $Q^{m\times n}$.

我们把主对角线上的元素全为 1,其他元素皆为零的 n 阶方阵

$$I_n=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1) \qquad (2.1.1)$$

称为 n 阶**单位**阵.当无必要指明其阶数时,单位阵简记为 I.把如

下的 n 阶方阵

$$J_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{pmatrix} = \mathrm{sdiag}(1,1,\cdots,1) \qquad (2.1.2)$$

称为 n 阶**次单位阵**.当无必要指明其阶数时,次单位阵简记为 J.

四元数矩阵的基本运算:加法、数乘和乘法与常规矩阵一样.

设 $A \in Q^{n\times n}$,若存在 $B \in Q^{n\times n}$,使得

$$AB = BA = I \qquad (2.1.3)$$

则称四元数矩阵 A 是**可逆的**,而称 B 为 A 的**逆阵**,A 的逆阵记为 A^{-1}.

A 的**共轭矩阵**记为 $\overline{A}$,A 的**转置矩阵**记为 A^{T},A 的**转置共轭** $(\overline{A^{\mathrm{T}}}) = \overline{A}^{\mathrm{T}}$ 记为 A^*.

设 $A = (a_{ij})_{n\times m} \in Q^{n\times m}$,则称矩阵

$$B = (b_{ij})_{m\times n},\ b_{ij} = a_{m-j+1,\,n-i+1}$$

为 A 的**次转置阵**,记为 A^{τ}.

四元数矩阵基本运算具有如下性质:

命题 2.1.1 设 A,B,C 均为四元数矩阵,$\lambda \in Q$,只要下面所涉及的运算可行,则有

1° $A + B = B + A$; (2.1.4)

2° $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,\ (A + B)\lambda = A\lambda + B\lambda$; (2.1.5)

3° $(AB)C = A(BC)$; (2.1.6)

4° 若 A,B 均可逆,则 AB 可逆,且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \qquad (2.1.7)$$

5° $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$; (2.1.8)

6° $\overline{AB} = (\overline{B^{\mathrm{T}}}\ \overline{A^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}} = (B^*A^*)^{\mathrm{T}}$; (2.1.9)

7° $(AB)^* = B^*A^*$; (2.1.10)

8° 若 A 可逆,则 A^* 亦可逆且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. (2.1.11)

证 我们仅给出 6° 与 8° 的证明,其他从略.

6° 设 $A=(a_{ij})_{m\times k}, B=(b_{ij})_{k\times n}$,

$AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$,

则
$$c_{ij}=\sum_{t=1}^{k}a_{it}b_{tj}$$

$$\overline{c_{ij}}=\sum_{t=1}^{k}\overline{a_{it}}\,\overline{b_{tj}}=\sum_{t=1}^{k}\overline{b_{tj}}\,\overline{a_{it}}$$

故
$$\overline{AB}=\overline{C}=(\overline{B^{\mathrm{T}}}\,\overline{A^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}}=(B^{*}A^{*})^{\mathrm{T}}.$$

8° 因 A 可逆,则 $AA^{-1}=I$,于是由 7°有

$$I=I^{*}=(AA^{-1})^{*}=(A^{-1})^{*}A^{*}$$

故
$$(A^{*})^{-1}=(A^{-1})^{*}$$
□

注 在四元数矩阵中,等式 $\overline{AB}=\overline{B}\overline{A}$ 一般不再成立,而只成立公式(2.1.9).

二、四元数矩阵的直积与圈积

定义 2.1.1 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{p\times q}$ 是 Q 上矩阵,称 Q 上 $mp\times nq$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}=(a_{ij}b_{kl})_{mp\times nq} \qquad (2.1.12)$$

为 A 与 B 的**直积**或**张量积**,或 kronecker **积**,记为 $A\otimes B$. 当 $B\in R^{p\times q}$ 时,称 $A\otimes B$ 为**弱右直积**;当 $A\in R^{m\times n}$ 时,称 $A\otimes B$ 为**弱左直积**,两者统称为**弱直积**.

定义 2.1.2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是 Q 上的方阵,则称

$$A\circ B=(a_{ij}b_{ij})_{n\times n} \qquad (2.1.13)$$

为 A 与 B 的**圈积**或 Hadamard **积**,如果 A 与 B 中有一个是 R 上的方阵,则称 $A\circ B$ 为**弱圈积**.

四元数矩阵的直积与圈积满足如下性质:

命题 2.1.2 只要下面所涉及的运算可行,就有

1° $0 \otimes A = A \otimes 0$ (2.1.14)

2° $(A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B$ (2.1.15)

$A \otimes (B_1 + B_2) = A \otimes B_1 + A \otimes B_2$ (2.1.16)

3° $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ (2.1.17)

4° $(A \otimes B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \otimes B^{\mathrm{T}}$ (2.1.18)

5° 当 A 为 R 上矩阵时,有

$$\overline{A \otimes B} = A \otimes \bar{B} (= \bar{A} \otimes \bar{B}) \tag{2.1.19}$$

6° 当 B 为 R 上矩阵时,有

$$\overline{A \otimes B} = \bar{A} \otimes B (= \bar{A} \otimes \bar{B}) \tag{2.1.20}$$

7° 当 B、C 中有一个是 R 上的矩阵时,有

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \tag{2.1.21}$$

8° 当 A、B 均可逆,且其中有一个是 R 上矩阵时,则 $A \otimes B$ 亦可逆,且

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \tag{2.1.22}$$

9° 当 A、B 中有一个为 R 上矩阵时,则有

$$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^* \tag{2.1.23}$$

10° $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$ (2.1.24)

11° $(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C$,

$C \circ (A + B) = C \circ A + C \circ B$ (2.1.25)

12° $(A \circ B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \circ B^{\mathrm{T}}$ (2.1.26)

13° $\overline{(A \circ B)} = \bar{B} \circ \bar{A}$ (2.1.27)

14° $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$ (2.1.28)

证 我们仅证明 5°,7°,其他从略.

5° 我们有

$$\overline{A \otimes B} = (\overline{a_{ij} b_{kl}})_{mp \times nq} = (\overline{b_{kl}}\ \overline{a_{ij}})_{mp \times nq}$$
$$= (\bar{b}_{kl} a_{ij})_{mp \times nq} = (a_{ij} \overline{b_{kl}})_{mp \times nq}$$
$$= A \otimes \bar{B}$$

7° 不妨设 C 是 R 上矩阵，记 $A = (a_{ij})_{m \times n}$，$C = (c_{ij})_{n \times l}$. 因为 $A \otimes B$（作为分块阵）的任意第 i 行为$(a_{i1}B, a_{i2}B, \cdots, a_{in}B)$，而 $C \otimes D$ 的任意第 j 列为

$$\begin{pmatrix} c_{1j}D \\ c_{2j}D \\ \cdots \\ c_{nj}D \end{pmatrix}$$

故$(A \otimes B)(C \otimes D)$（作为分块阵）的$(ij)$元为（注意 $c_{kj} \in R$）

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}B)(c_{kj}D) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj})BD$$

上式右边恰好是 $AC \otimes BD$ 的(i, j)元，故式(2.1.21)即 7°成立.

□

三、四元数矩阵的初等变换和矩阵的相似及相合

四元数矩阵的初等变换与常规矩阵的初等变换有所不同.

定义 2.1.3 设 $A \in Q^{n \times n}$，$\lambda \in Q$，则 $Q^{n \times n}$ 上的第一、二、三套**初等变换**分别规定如下：

1° 把 A 的第 j 行的左 $\bar{\lambda}$ 倍加到第 i 行，再把第 j 列的右 λ 倍加到第 i 列$(i \neq j)$，此变换又称为**消法变换**；

2° 用 $\bar{\lambda}(\neq 0)$ 左乘 A 的第 i 行，再用 λ 右乘 A 的 i 列，此变换又称为**倍法变换**；

3° 互换 A 的第 i, j 两行，再互换第 i, j 两列，此变换又称为**换法变换**.

我们记 $P(i, j_\lambda)$ 为单位阵 I 的第 j 列右 λ 倍加至第 i 列后所得之矩阵并称之为**消法矩阵**；$P(i(\lambda))$ 表示单位阵 I 的第 i 列右 λ

$(\neq 0)$倍后所得之矩阵并称之为**倍法矩阵**;$P(i,j)$表示交换单位阵 I 的第i,j 两列后所得之矩阵并称之为**换法矩阵**或**置换矩阵**. $P(i,j_\lambda),P(i(\lambda)),P(i,j)$统称为初等矩阵.显然所有初等阵均是可逆的,且 $P(i,j_\lambda)^{-1}=P(i,j_{-\lambda}),P(\lambda(x))^{-1}=P(i(\frac{1}{\lambda}))$, $P(i,j)^{-1}=P(j,i)$.

以下命题显然成立:

命题2.1.3 对 $A\in Q^{n\times n}$施行第一、二、三套初等变换分别相当于

i) $P(i,j_\lambda)^* AP(i,j_\lambda)$;

ii) $P(i(\lambda))^* AP(i(\lambda))$;

iii) $P(i,j)^* AP(i,j)$.

定义2.1.4 设 $A,B\in Q^{n\times n}$,若存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使 $B=PAP^{-1}$,则称 A 与 B 是**相似的**,记为 $A\sim B$.

定义2.1.5 设 $A,B\in Q^{n\times n}$,若存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使 $B=P^* AP$,则称 A 与 B 是**相合的**.

显然矩阵的相似关系和相合关系都是一种等价关系.

由定义 2.1.5 及命题2.1.3 可得如下:

命题2.1.4 设 $A\in Q^{n\times n}$,则对 A 施以定义2.1.3 中的三套初等变换的任何一套后,所得矩阵 B 必相合于A.

§2.2 四元数自共轭矩阵

我们知道,实矩阵中的对称阵和复矩阵中的厄米特(Hermite)阵都是非常重要的一类矩阵,与此相对应,在四元数矩阵中有所谓自共轭阵,它在四元数矩阵中同样占有非常重要的地位.在这一节中,我们将讨论自共轭阵及其基本性质,它的进一步的性质在第四章还将讨论.

我们先给出一些相关的概念.

定义 2.2.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 $A^*=A$,则称 A 为**四元数自共轭阵**,n 阶四元数自共轭阵的全体记为 $SC_n(Q)$;若 $A^*=-A$,则称 A 为四元数**斜自共轭阵**,n 阶四元数斜自共轭阵的全体记为 $SC_n^-(Q)$;若 $U\in Q^{n\times n}$,且 $U^*U=UU^*=I$,则称 U 为**广义酉矩阵**,n 阶广义酉矩阵的全体记为 $U^{n\times n}$.

实对称阵和复厄米特阵都是特殊的自共轭阵,实正交阵和复酉阵都是特殊的广义酉矩阵.

命题 2.2.1 设 $A\in SC_n(Q)$,则对任意 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in Q^{n\times 1}$,$x^*Ax$ 必为实数.

证 因 $A^*=A$,则

$$\overline{x^*Ax}=(x^*Ax)^*=x^*A^*x=x^*Ax$$

故
$$x^*Ax\in R$$
□

定义 2.2.2 设 $A\in SC_n(Q)$,若对任意 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in Q^{n\times 1}$,有

$$x^*Ax>0(\geqslant 0)$$

则称 A 为四元数(半)**正定矩阵**.n 阶四元数(半)正定矩阵的全体记为 $SC_n^>(Q)(SC_n^{\geqslant}(Q))$.

命题 2.2.2 设 $U_1,U_2\in U^{n\times n}$,则 $U_1U_2\in U^{n\times n}$.

证 因 $U_1,U_2\in U^{n\times n}$,则

$$U_1^*U_1=U_1U_1^*=I,U_2^*U_2=U_2U_2^*=I,$$

故
$$\begin{aligned}(U_1U_2)^*(U_1U_2)&=U_2^*U_1^*U_1U_2\\&=U_2^*IU_2=U_2^*U_2=I\end{aligned}$$

同理有
$$(U_1U_2)(U_1U_2)^*=I$$

故
$$U_1U_2\in U^{n\times n}$$
□

命题 2.2.3 设 δ 为单位四元数(即 δ 的模 $|\delta|=\sqrt{\bar{\delta}\delta}=1$),则 $D_i(\delta)=P(i(\delta))$ 是一个广义酉矩阵.

证 因为显然有 $D_i^*(\delta)D_i(\delta)=D_i(\delta)D_i^*(\delta)=I$,故 $D_i(\delta)$ 是一个广义酉矩阵. □

命题 2.2.4 设 $A\in SC_n(Q)$,若 A 可逆,则 $A^{-1}\in SC_n(Q)$

证 由式(2.1.11)及 $A^*=A$,有

$$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=A^{-1}$$

故

$$A^{-1}\in SC_n(Q)$$ □

命题 2.2.5 设 $A\in Q^{n\times n},P\in Q^{n\times n}$,$P$ 可逆,则

$$A\in SC_n(Q)\Leftrightarrow PAP^*\in SC_n(Q)$$

证 "⇒" 由 $A\in SC_n(Q)$有 $A^*=A$,于是有

$$(PAP^*)^*=PA^*P^*=PAP^*\in SC_n(Q)$$

"⇐" 由 $PAP^*\in SC_n(Q)$,有$(PAP^*)^*=PAP^*$,

即

$$PA^*P^*=PAP^*$$

又 P 可逆,则 P^*亦可逆,于是由上式有

$$A^*=P^{-1}PAP^*(P^*)^{-1}=A$$

故

$$A\in SC_n(Q)$$ □

命题 2.2.6 设 $A\in SC_n(Q)$且可逆,$D\in SC_m(Q)$,$C\in Q^{m\times n}$,则

$$\begin{pmatrix} I & 0\\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C^*\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}C^*\\ 0 & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & D-CA^{-1}C^*\end{pmatrix}\tag{2.2.1}$$

且式(2.2.1)中的 $D-CA^{-1}C^*\in SC_m(Q)$.

证 由条件知$\begin{pmatrix} A & C^*\\ C & D\end{pmatrix}\in SC_{n+m}(Q)$,于是由命题 2.2.5

知

$$\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & D-CA^{-1}C^*\end{pmatrix}\in SC_{n+m}(Q)$$

故

$$D-CA^{-1}C^*\in SC_m(Q)$$ □

定理 2.2.1 对 Q 上任意自共轭矩阵 A，恒有广义酉矩阵 U，使得 UAU^* 为实对角阵.

证 对 A 的阶数 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，显然成立. 假定对 $n-1$ 阶的自共轭矩阵，命题成立，现在设 A 为 n 阶的. 记 A 为

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_{n-1}\end{matrix} \\ \bar{\alpha}_1\cdots\bar{\alpha}_{n-1} & a \end{pmatrix}$$

由归纳法假设知有 $n-1$ 阶的广义酉矩阵 U_1，使 $U_1A_1U_1^*$ 为实对角阵，设为

$$U_1AU_1^*=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1}\end{pmatrix}$$

现在令

$$U_0=\begin{pmatrix} U_1 & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ 0\cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 U_0 显然为 n 阶广义酉矩阵，而且有

$$U_0AU_0^*=\begin{pmatrix} \begin{matrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1}\end{matrix} & U_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix} \\ (\bar{\alpha}_1\cdots\bar{\alpha}_{n-1})U_1^* & a \end{pmatrix}$$

如果令

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}=U_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix}$$

则易知有

$$(\bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_{n-1}) = (\bar{\alpha}_1 \cdots \bar{\alpha}_{n-1}) U_1^*$$

故

$$U_0 A U_0^* = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \beta_1 \\ & a_2 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 & \cdots & \bar{\beta}_{n-1} & a \end{pmatrix}$$

现在令

$$\delta_i = \begin{cases} \dfrac{\bar{\beta}_i}{b_i}, & b_i = \sqrt{\beta_i \bar{\beta}_i}, \quad \text{当 } \beta_i \neq 0 \text{ 时}, \\ 1, & b_i = 0, \quad \text{当 } \beta_i = 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

$$D = D_1(\delta_1) D_2(\delta_2) \cdots D_{n-1}(\delta_{n-1}) = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \delta_{n-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

则由命题 2.2.2 知 DU_0 为广义酉矩阵,且

$$(DU_0)^* = U_0^* D^* = U_0^* D_{n-1}(\bar{\delta}_{n-1}) \cdots D_2(\bar{\delta}_2) D_1(\bar{\delta}_1)$$

再由

$$\delta_i \bar{\delta}_i = \bar{\delta}_i \delta_i = 1 \quad (i = 1, \cdots, n-1)$$

即可得

$$(DU_0) A (DU_0)^* = \begin{pmatrix} a_1 & & & & b_1 \\ & a_2 & & & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & a \end{pmatrix}$$

此为实对称矩阵,从而又有实正交矩阵 T(当然 T 也是广义酉阵),使

$$T(DU_0)A(DU_0)^*T^* = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}, c_i \in R, i=1,\cdots,n$$

故若令

$$U = T(DU_0)$$

则由命题2.2.2知 U 为广义酉矩阵,且

$$U^* = (DU_0)^*T^*$$

归纳法完成. □

§2.3 四元数矩阵的复分解式与导出阵

由式(1.6.2)知,每一个四元数 $q = a_1 + a_2\mathrm{i} + a_3\mathrm{j} + a_4\mathrm{k}(a_1, a_2, a_3, a_4 \in R)$可唯一地表示为 $q = z_1 + z_2\mathrm{j}(z_1, z_2 \in C)$. 故四元数体 Q 上的任一 $m \times n$ 阶矩阵 A 可唯一地表示为

$$A = A_1 + A_2\mathrm{j}\ (A_1, A_2 \in C^{m\times n}) \qquad (2.3.1)$$

定义 2.3.1 称式(2.3.1)为四元数矩阵 A 在复数域 C 上的**分解式**.

命题 2.3.1

1° 设 $X = X_1 + X_2\mathrm{i} \in C^{m\times n}$,其中 $X_1, X_2 \in R^{m\times n}$,则

$$\mathrm{j}X = \overline{X}\mathrm{j} \qquad (2.3.2)$$

$$\mathrm{j}X\mathrm{j} = -\overline{X} \qquad (2.3.3)$$

$$\mathrm{j}X^* = X^{\mathrm{T}}\mathrm{j} \qquad (2.3.4)$$

$$(X\mathrm{j})^* = -X^{\mathrm{T}}\mathrm{j} \qquad (2.3.5)$$

2° 设 $A = A_1 + A_2\mathrm{j} \in Q^{m\times n}$,其中 $A_1, A_2 \in C^{m\times n}$,则

$$A^* = A_1^* - A_2^{\mathrm{T}}\mathrm{j} \qquad (2.3.6)$$

3° 设 $A \in Q^{m\times n}, B \in Q^{n\times p}$, A, B 在复数域 C 上的分解式分别为 $A = A_1 + A_2\mathrm{j}$, $B = B_1 + B_2\mathrm{j}$, 则 $AB \in Q^{m\times p}$在复数域 C 上的

分解式为

$$AB=(A_1B_1-A_2\overline{B}_2)+(A_1B_2+A_2\overline{B}_1)\mathrm{j} \qquad (2.3.7)$$

证

1° 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{j}X &= \mathrm{j}(X_1+X_2\mathrm{i})=X_1\mathrm{j}+X_2\mathrm{ji}\\ &= X_1\mathrm{j}-X_2\mathrm{ij}=(X_1-X_2\mathrm{i})\mathrm{j}=\overline{X}\mathrm{j}\end{aligned}$$

故式(2.3.2)成立.

由式(2.3.2)即得式(2.3.3),由式(2.3.3)即得式(2.3.4),由式(2.3.4)即得式(2.3.5).

2° 由 $A=A_1+A_2\mathrm{j}$ 及式(2.3.5),有

$$A^*=A_1{}^*+(A_2\mathrm{j})^*=A_1{}^*-A_2{}^{\mathrm{T}}\mathrm{j}$$

3° 由式(2.3.2),有

$$\begin{aligned}AB &= (A_1+A_2\mathrm{j})(B_1+B_2\mathrm{j})\\ &= A_1B_1+A_2\mathrm{j}B_2\mathrm{j}+A_1B_2\mathrm{j}+A_2\mathrm{j}B_1\\ &= (A_1B_1-A_2\overline{B}_2)+(A_1B_2+A_2\overline{B}_1)\mathrm{j}.\end{aligned}$$ □

定义 2.3.2 设 $A\in Q^{m\times n}$, $A=A_1+A_2\mathrm{j}$ 是 A 在复数域 C 上的分解式,则称

$$A^{\sigma}=\begin{pmatrix}A_1 & -A_2\\ \overline{A}_2 & \overline{A}_1\end{pmatrix}\in C^{2m\times 2n} \qquad (2.3.8)$$

为四元数矩阵 A 的**复表示矩阵**或 A 在复数域 C 上的**导出阵**.

注 用 A^{σ} 来研究 A 的有关性质可以带来不少方便.

对单元素矩阵,即 $A=(q)\in Q^{1\times 1}$,这时,

$$q=z_1+z_2\mathrm{j},\quad z_1,z_2\in C$$

于是有

$$q^{\sigma}=\begin{pmatrix}z_1 & -z_2\\ \overline{z}_2 & \overline{z}_1\end{pmatrix}\in C^{2\times 2} \qquad (2.3.9)$$

特别

$$1^\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2, \quad \mathrm{i}^\sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{j}^\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{k}^\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3.10}$$

命题 2.3.2

1° 设 A、$B \in Q^{m\times n}$，则 $A^\sigma = B^\sigma \Leftrightarrow A = B$ (2.3.11)

2° 设 $A \in Q^{m\times n}$，$a \in R$，则 $(aA)^\sigma = aA^\sigma$ (2.3.12)

3° 设 A、$B \in Q^{m\times n}$，则 $(A+B)^\sigma = A^\sigma + B^\sigma$ (2.3.13)

4° 设 $A \in Q^{m\times n}$，$f(x)$ 为 R 上多项式，则

$$f(A^\sigma) = (f(A))^\sigma \tag{2.3.14}$$

5° 设 $A \in Q^{n\times m}$，$B \in Q^{m\times p}$，则 $(AB)^\sigma = A^\sigma B^\sigma$ (2.3.15)

6° 设 $A \in Q^{n\times n}$ 可逆，则 A^σ 亦可逆，且

$$(A^\sigma)^{-1} = (A^{-1})^\sigma \tag{2.3.16}$$

7° 设 $A \in Q^{n\times m}$，则 $(A^\sigma)^* = (A^*)^\sigma$ (2.3.17)

8° 设 $A \in Q^{n\times m}$，则 $\mathrm{rank}A^\sigma = 2\mathrm{rank}A$ (2.3.18)

9° $A \sim B \Rightarrow A^\sigma \sim B^\sigma$ (2.3.19)

10° A 是自共轭阵 $\Leftrightarrow A^\sigma$ 是厄米特阵 (2.3.20)

证 1°、2°、3°、4°是明显的，仅证 5°～10°.

5° 设 $A = A_1 + A_2\mathrm{j}$，$C = C_1 + C_2\mathrm{j}$，其中 $A_1, A_2 \in C^{m\times n}$，$C_1$，$C_2 \in C^{n\times p}$，则由式(2.3.7)有

$$AC = (A_1C_1 - A_2\bar{C}_2) + (A_1C_2 + A_2\bar{C}_1)\mathrm{j}$$

于是

$$\begin{aligned}(AC)^\sigma &= \begin{pmatrix} A_1C_1 - A_2\bar{C}_2 & -(A_1C_1 + A_2\bar{C}_1) \\ \overline{A_1C_1 + A_2\bar{C}_1} & \overline{A_1C_1 - A_2\bar{C}_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1C_1 - A_2\bar{C}_2 & -A_1C_2 - A_2\bar{C}_1 \\ \bar{A}_1\bar{C}_1 + \bar{A}_2C_1 & \bar{A}_1\bar{C}_1 - \bar{A}_2C_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & -C_2 \\ \bar{C}_2 & \bar{C}_1 \end{pmatrix} = A^\sigma C^\sigma\end{aligned}$$

6° 因A 可逆，则有

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$$

由 4°有

$$A^\sigma(A^{-1})^\sigma=(A^{-1})^\sigma A^\sigma=I_n^\sigma=I_{2n}$$

故 A^σ 可逆，且$(A^\sigma)^{-1}=(A^{-1})^\sigma$.

7° 设$A=A_1+A_2\mathrm{j}$

则
$$A^*=A_1{}^*-A_2{}^{\mathrm{T}}j$$

故
$$(A^*)^\sigma=\begin{pmatrix} A_1{}^* & A_2{}^{\mathrm{T}} \\ -A_2{}^* & A_1{}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \tag{2.3.21}$$

从而

$$(A^\sigma)^*=\begin{pmatrix} A_1 - A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} A_1{}^* & A_2{}^{\mathrm{T}} \\ -A_2{}^* & A_1{}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=(A^*)^\sigma$$

8° 由[1]知，存在 $P\in Q^{m\times m}$，$T\in Q^{n\times n}$，且 P,T 均可逆，使得

$$PAT=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由 4°有

$$P^\sigma A^\sigma T^\sigma=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\sigma=\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

又由 6°知，P^σ，T^σ 均可逆，故 A^σ 的秩为 $2r$.

9° 由 7°与 5°即得.

10° 显然. □

第三章　四元数矩阵的行列式

由于四元数的乘法不满足交换律，致使一般四元数矩阵行列式的定义变得十分困难．早在20世纪40年代和70年代有人就曾给出过四元数矩阵行列式的定义，但不便于应用．到了20世纪80年代和90年代，我国谢邦杰教授和陈龙玄教授又分别给出了四元数矩阵行列式的两种新的定义，同时后者还定义了一种特殊行列式，即所谓重行列式．这些都给四元数体上的线性代数研究带来很多方便．

本章主要论述陈龙玄意义下的四元数矩阵行列式的定义及有关结果，并简要介绍一下四元数矩阵行列式的其他定义，同时指出这些定义之间的关系．

§3.1　四元数矩阵行列式的定义

一般域 F 上，n 阶矩阵行列式定义为域 F 上的一个数，这个数是 $n!$ 个项的和，其中每一项是不同行、不同列上的 n 个元素之积，并加上适当的符号．而在四元数体上来定义矩阵的行列式时，困难之处就在于：因为四元数不满足乘法的交换律，每一项的这 n 个元素应按什么排列相乘，每一项前面的符号又怎样规定？陈龙玄教授利用 n 文字的对称群给出了四元数矩阵的行列式的定义，这就是如下的：

定义 3.1.1　设 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$，则定义

$$|A| = \det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\triangle}{=\!=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{n_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s n_1} a_{n_2 j_2} \cdots a_{j_t n_2} \cdots a_{n_r k_2} \cdots a_{k_l n_r}$$

(3.1.1)

其中 S_n 是 n 文字的对称群，S_n 中元素 σ 的不相交的循环分解写成如下的正规式：

$$\sigma = (n_1 i_2 i_3 \cdots i_s)(n_2 j_2 j_3 \cdots j_t) \cdots (n_r k_2 k_3 \cdots k_l) \tag{3.1.2}$$

$$n_1 > i_2, i_3, \cdots, i_s; n_2 > j_2, j_3, \cdots, j_t; \cdots; n_r > k_2, k_3, \cdots, k_l \tag{3.1.3}$$

$$n = n_1 > n_2 > \cdots > n_r \geqslant 1 \tag{3.1.4}$$

且
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{(s-1)+(t-1)+\cdots+(r-1)} = (-1)^{n-r} \tag{3.1.5}$$

容易看出，如果所有 a_{ij} 两两可换，则上述行列式定义与常规行列式的定义是相同的.

为方便与清楚起见，若循环因子 $\sigma_0 = (i_1 i_2 \cdots i_s)$，则按如下方式书写：

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{s-1} i_s} = \langle i_1 i_2 \cdots i_s \rangle \tag{3.1.6}$$

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s i_1} = \langle i_1 i_2 \cdots i_s i_1 \rangle = \langle \sigma_0 \rangle \tag{3.1.7}$$

于是表达式(3.1.1)可简化成

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r} \varepsilon(\sigma) \langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle \cdots \langle \sigma_r \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \langle \sigma \rangle \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

当 $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$ 时，我们有

$$\overline{\langle i_1 i_2 \cdots i_s i_1 \rangle} = \bar{a}_{i_s i_1} \bar{a}_{i_{s-1} i_s} \cdots \bar{a}_{i_2 i_3} \bar{a}_{i_1 i_2}$$

$$= a_{i_1 i_s} a_{i_s i_{s-1}} \cdots a_{i_3 i_2} a_{i_2 i_1}$$

$$= < i_1 i_s i_{s-1} \cdots i_2 i_1 > \tag{3.1.9}$$

我们称 $Q^n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \mid a_i \in Q, i = 1,2,\cdots,n\}$ 为**广义酉空间**，Q^n 中向量 $\alpha = (a_1, a_2 \cdots, a_n)^T$，$\beta = (b_1, b_2 \cdots, b_n)^T$ 的内积定义为

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i b_i = \alpha^* \beta \tag{3.1.10}$$

其中 $\alpha^* = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_n)$.

为了获得四元数矩阵行列式定义的一些感性知识，我们先考察一下按定义 3.1.1 如何具体计算二阶和三阶四元数矩阵.

当 $n=2$ 时，对称群 $S_2 = \{(1)(2), (12)\}$，对照式(3.1.2)～(3.1.5)，有

对 $\sigma_1 = (1)(2) = (2)(1)$，有 $r=2, n_1=2, n_2=1, n-r=0$，

$\therefore \varepsilon(\sigma_1) a_{n_1 n_1} a_{n_2 n_2} = (-1)^{n-r} a_{22} a_{11} = (-1)^0 a_{22} a_{11} = a_{22} a_{11}$

对 $\sigma_2 = (1\ 2)$，有 $r=1, n_1=2, n_2=1, n-r=1$，

$$\therefore \varepsilon(\sigma_2) a_{n_2 n_1} a_{n_1 n_2} = (-1)^{n-r} a_{21} a_{12}$$

$$= (-1)^{2-1} a_{21} a_{12} = -a_{21} a_{12}$$

故
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22} a_{11} - a_{21} a_{12} \tag{3.1.11}$$

当 $n=3$ 时，$S_3 = \{(1)(2)(3), (12), (13), (23), (123), (132)\}$，有

对 $\sigma_1 = (1)(2)(3) = (3)(2)(1)$，有 $r=3, n_1=3, n_2=2, n_3=1, n-r=0$，

$\therefore \varepsilon(\sigma_1) = a_{n_1 n_1} a_{n_2 n_2} a_{n_3 n_3} = (-1)^{n-r} a_{33} a_{22} a_{11} = a_{33} a_{22} a_{11}$.

对 $\sigma_2 = (12) = (3)(21)$，有 $r=2, n_1=3, n_2=2, n-r=1$，

$\therefore \varepsilon(\sigma_2)=a_{n_1n_1}a_{n_2j_2}a_{j_2n_2}=(-1)^{n-r}a_{33}a_{21}a_{12}=-a_{33}a_{21}a_{12}$.

对 $\sigma_3=(13)=(31)(2)$，有 $r=2, n_1=3, n_2=2, n-r=1$，

$\therefore \varepsilon(\sigma_3)a_{31}a_{13}a_{22}=(-1)^1a_{31}a_{13}a_{22}=-a_{31}a_{13}a_{22}$.

对 $\sigma_4=(23)=(32)(1)$，有 $r=2, n_1=2, n_2=1, n-r=1$，

$\therefore \varepsilon(\sigma_4)a_{32}a_{23}a_{11}=(-1)^1a_{32}a_{23}a_{11}=-a_{32}a_{23}a_{11}$.

对 $\sigma_5=(123)=(312)$，有 $r=1, n_1=3, n-r=2$，

$\therefore \varepsilon(\sigma_5)a_{31}a_{12}a_{23}=(-1)^2a_{31}a_{12}a_{23}=a_{31}a_{12}a_{23}$.

对 $\sigma_6=(132)=(312)$，有 $r=1, n_1=3, n-r=2$，

$\therefore \varepsilon(\sigma_6)a_{32}a_{21}a_{13}=(-1)^2a_{32}a_{21}a_{13}=a_{32}a_{21}a_{13}$.

故

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{33}a_{22}a_{11}+a_{32}a_{21}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$-a_{31}a_{13}a_{22}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12} \qquad (3.1.12)$$

由上可以看出，按定义 3.1.1 来计算四元数矩阵的行列式是异常繁难的. 但是对于一些特殊的四元数矩阵的行列式，由定义 3.1.1 易得：

例 1 设 $A\in Q^{n\times n}$，若 A 为对角阵

$$A=\begin{pmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_n\end{pmatrix}$$

则

$$\det A=q_nq_{n-1}\cdots q_1.$$

例 2 设 $A\in Q^{n\times n}$，若 A 为上或下三角阵

$$A=\begin{pmatrix} q_1 & & * \\ & q_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & q_n\end{pmatrix} \text{或} A=\begin{pmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ * & & \ddots & \\ & & & q_n\end{pmatrix}$$

则 $$\det A = q_n q_{n-1}\cdots q_1.$$

例 3

$$\det\begin{pmatrix} & q_1 \\ q_2 & \end{pmatrix} = -q_2 q_1$$

$$\det\begin{pmatrix} & & q_1 \\ & q_2 & \\ q_3 & & \end{pmatrix} = -q_3 q_1 q_2$$

$$\det\begin{pmatrix} & & & q_1 \\ & & q_2 & \\ & q_3 & & \\ q_4 & & & \end{pmatrix} = q_4 q_1 q_3 q_2$$

$$\det\begin{pmatrix} & & & q_1 \\ & & q_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ q_{n-1} & & & \\ q_n & & & \end{pmatrix} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q_n q_1 q_{n-1} q_2 \cdots \\ \qquad q_{\frac{n+3}{2}} q_{\frac{n-1}{2}} q_{\frac{n+1}{2}}, \text{当 } n \text{ 为奇时;} \\ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q_n q_1 q_{n-1} q_2 \cdots \\ \qquad q_{\frac{n}{2}+1} q_{\frac{n}{2}}, \text{当 } n \text{ 为偶时.} \end{cases}$$

§3.2 四元数矩阵行列式的性质

首先由 Q 中的分配律,我们有:

命题 3.2.1 设 $a_{ij}, b_{ij} \in Q, i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,n$,则

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

$$\det\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

命题3.2.2 若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\in Q^{n\times n}$, (3.2.1)

其中 $A_1\in Q^{t\times t}, A_2\in Q^{(n-t)\times(n-t)}$,则

$$\det A=\det A_2\det A_1 \tag{3.2.2}$$

证 设 $\sigma_k=(i_1i_2\cdots i_p)$是 σ 的一个循环因子,$\sigma\in S_n$,由积 $a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{p-1}i_p}a_{i_pi_1}\neq 0$ 得:

若 $i_1\leqslant t$,则 $i_p,i_{p-1},\cdots,i_3,i_2\leqslant t$,从而

$$1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_p\leqslant t \quad ①$$

类似地,若 $i_1>t$,则 $i_2,i_3,\cdots,i_p>t$,从而

$$t+1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_p\leqslant n \quad ②$$

所以,σ 的每一个循环因子中元素的个数取决于行列式中满足式①或②的非零项.记 ξ 是满足式②的循环因子的乘积,η 是满足式①的循环因子的乘积,则由式(3.1.4)得 $\sigma=\xi\eta$.于是由式(3.1.5)得$\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(\xi)\varepsilon(\eta)$,从而由式(3.1.8),有

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\langle\sigma\rangle=\sum_{\sigma=\xi\eta\in S_n}\varepsilon(\xi)\varepsilon(\eta)\langle\xi\rangle\langle\eta\rangle \\ &= \sum_{\xi}\varepsilon(\xi)\langle\xi\rangle\sum_{\eta}\varepsilon(\eta)\langle\eta\rangle \\ &= \det A_2\det A_1\end{aligned}$$

□

定理3.2.1 设 $A\in SC_n(Q)$,则

$$\det A \in R$$

即四元数自共轭矩阵的行列式是一个实数.

证 设 $A=(a_{ij})$,由 $A^*=A$,知 $a_{ji}=\bar{a}_{ij}$,于是由式(3.1.9),有

$$\overline{<i_1 i_2 \cdots i_s i_1>} = <i_1 i_s i_{s-1} \cdots i_2 i_1> \qquad ①$$

对于 $\det A$ 的表达式(3.1.1),任取 S_n 的一个具有分解式(3.1.2)的元素 σ,考虑

$$\begin{aligned}\{\sigma\} = \varepsilon(\sigma)[&<n_1 i_2 i_3 \cdots i_s n_1> + <n_1 i_s \cdots i_3 i_2 n_1>] \\ &\cdot[<n_2 j_2 \cdots j_t n_2> + <n_2 j_t \cdots j_2 n_2>] \cdots \\ &\cdot[<n_r k_2 \cdots k_l n_r> + <n_r k_l \cdots k_2 n_r>] \end{aligned} \qquad ②$$

表达式②中的每一项对应于一个置换,所有这些置换有相同的循环结构:它们有相同个数的循环因子,且相应的循环因子的长度相同,于是它们有相同的奇偶性 $\varepsilon(\sigma)$. 因此,$\{\sigma\}$中所有的项它必在 $\det A$ 的表达式中. 对于长度$\leqslant 2$ 的循环因子,由于式②中方括号中的这样的两项是相同的,这时我们可以作这样的处理,即取相同的两项中的一项. 由式①知式②中的方括号中的所有和都是实数,故$\{\sigma\}$也是实数. 去掉式(3.1.8)右边的项构成的一个集合的和$\{\sigma\}$. 令 τ 是一个任意的置换,从余下的项中类似地去掉$\{\tau\}$,显然,若 $\sigma \neq \tau$,则在$\{\sigma\}$和$\{\tau\}$中的所有的项是不同的. 上述的方法如此进行下去,直到式(3.1.8)右边所有的项去掉,这样就证明了

$$\det A = \{\sigma\} + \{\tau\} + \cdots + \{\gamma\}$$

是一个实数. □

命题 3.2.3 设 $A \in SC_n(Q)$,$\sigma \in S_n$,k 是置换σ 的一个循环因子 $\sigma_0 = (p_1 p_2 \cdots p_s k q_1 \cdots q_t)$中最大的数,记

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma} &= (p_1 q_t \cdots q_1 k p_s \cdots p_2) \\ \sigma_0^{\ +} &= (k q_1 \cdots q_t p_1 \cdots p_s) \\ \bar{\sigma}_0^{\ +} &= (k p_s \cdots p_2 p_1 q_t \cdots q_1) \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.3)$$

则有 $$<\sigma_0> + <\bar{\sigma}_0> = <\sigma_0^+> + <\bar{\sigma}_0^+>. \tag{3.2.4}$$

证 由下面方括号中的元素是实数,我们有

$$\begin{aligned}<\sigma_0> &= <p_1\cdots p_s k>\{[<kq_1\cdots q_t p_1> + <p_1 q_t\cdots q_1 k>] \\ &\quad - <p_1 q_t\cdots q_1 k>\} \\ &= <kq_1\cdots q_t p_1\cdots p_s k> + <p_1 q_t\cdots q_1 k><p_1\cdots p_s k> \\ &\quad - <p_1\cdots p_s k><p_1 q_t\cdots q_1 k>,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}<\bar{\sigma}_0> &= <p_1 q_t\cdots q_1 k>\{[<kp_s\cdots p_2 p_1> \\ &\quad + <p_1 p_2\cdots p_s k>] - <p_1 p_2\cdots p_s k>\} \\ &= <kp_s\cdots p_2 p_1 q_t\cdots q_1 k> \\ &\quad + <p_1\cdots p_s k><p_1 q_t\cdots q_1 k> \\ &\quad - <p_1 q_t\cdots q_1 k><p_1\cdots p_s k>.\end{aligned}$$

将上述两个表达式相加,即得式(3.2.4),对应于式(3.2.4)的右边的项的循环因子中的第一数 k 是最大的,这就是使循环因子的表示已经是相应于式(3.1.3)的正规形式. □

定理 3.2.2 设 $A\in SC_n(Q)$,则

$$\det P(i,j)^* AP(i,j) = \det A \tag{3.2.5}$$

证 若 i,j,n 是互不相同的,则有

$$P(j,n)P(i,n)P(j,n) = P(i,j) \qquad ①$$

因此只须证明

$$\det P(j,n)^* AP(j,n) = \det A.$$

若交换 σ 的元素 n 与 j,将 σ 变成 σ',即

$$\sigma|_{n\leftrightarrow j} = \sigma'$$

由

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)<\sigma> \qquad ②$$

得

$$\det P(j,n)^* AP(i,j) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)<\sigma>|_{n\leftrightarrow j}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \langle \sigma' \rangle \qquad ③$$

若 n 与 j 在同一个循环因子中，设

$$\sigma = (np_1 \cdots p_s j q_1 \cdots q_t) \cdots, s, t \geqslant 0$$

则交换 n 与 j，可得下面的置换

$$\sigma' = (jp_1 \cdots p_s n q_1 \cdots q_t) \cdots,$$
$$\sigma'^{+} = (nq_1 \cdots q_t j p_1 \cdots p_s) \cdots,$$
$$\bar{\sigma}' = (jq_t \cdots q_1 n p_s \cdots p_1) \cdots,$$
$$\bar{\sigma}'^{+} = (np_s \cdots p_1 j q_t \cdots q_1) \cdots,$$

由式(3.2.4)，对应的项有关系：

$$\langle \sigma' \rangle + \langle \bar{\sigma}' \rangle = \langle \sigma'^{+} \rangle + \langle \bar{\sigma}'^{+} \rangle \qquad ④$$

由于 $\sigma, \sigma', \bar{\sigma}', \sigma'^{+}$ 与 $\overline{\sigma'}^{+}$ 有相同的循环结构，从而它们有相同的奇偶性 ε，因此由式④知，式③两边两项的和 $\varepsilon(\sigma') \langle \sigma' \rangle + \varepsilon(\overline{\sigma'}) \langle \overline{\sigma'} \rangle$ 变成了式②右边两个正规项的和 $\varepsilon(\sigma'^{+}) \langle \sigma'^{+} \rangle + \varepsilon(\bar{\sigma}'^{+}) \langle \bar{\sigma}'^{+} \rangle$.

若 n, j 在不同的循环因子中，设

$$\sigma = (ni_1 i_2 \cdots i_s) \cdots (u_1 \cdots u_t j v_1 \cdots v_l) \cdots, s, t, l \geqslant 0$$

由式(3.2.4)，我们在式①中有

$$\begin{aligned}
&\langle \sigma_1' \rangle \cdots \langle \sigma_2' \rangle + \langle \sigma_1' \rangle \cdots \langle \bar{\sigma}_2' \rangle \\
&+ \langle \bar{\sigma}_1' \rangle \cdots \langle \sigma_2' \rangle \cdots + \langle \bar{\sigma}_1' \rangle \cdots \langle \bar{\sigma}_2' \rangle \cdots \\
&= [\langle \sigma_1' \rangle + \langle \bar{\sigma}_1' \rangle] \cdots [\langle \sigma_2' \rangle + \langle \bar{\sigma}_2' \rangle] \cdots \\
&= [\langle \sigma_1'^{+} \rangle + \langle \bar{\sigma}_1'^{+} \rangle] \cdots [\langle \sigma_2'^{+} \rangle + \langle \bar{\sigma}_2'^{+} \rangle] \cdots
\end{aligned}$$

在最后的表达式中，所有循环因子的表示都是正规的. 因为在方括号中的所有数都是实数，按照正规化条件式(3.1.4)重新排列所有方括号的次序，则表达式中加上系数 $\varepsilon(\sigma)$ 的项就变成了式②中的某些项. 因此，在这种情况下，通过将式③中的所有项分成没有共同项的和，式③中的所有项就能正规化成式②中的项. 这样，我们就已经证明：

$$\det P(j,n)^* AP(j,n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \langle \sigma' \rangle$$
$$= \sum_{\sigma^+ \in S_n} \varepsilon(\sigma^+) \langle \sigma^+ \rangle = \det A. \quad \square$$

命题 3.2.4 设 $A=(a_{ij}) \in Q^{n\times n}$(不一定为自共轭阵),$\lambda \in Q$,则

$$\det P(n(\lambda))A = \lambda \det A \tag{3.2.6}$$

即
$$\det{}_\lambda A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.2.6$'$}$$

证 由行列式定义(3.1.1)式即知. $\square$

命题 3.2.5 设 $A \in SC_n(Q)$,则 $\det AP(n(\lambda)) = \lambda \det A$,即

$$\det A_\lambda = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\lambda \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n}\lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.2.7}$$

证 由行列式定义(3.1.1)知

$$\det A_\lambda = \sum_{\sigma\in S_n,\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_r} \varepsilon(\sigma)<\sigma_1><\sigma_2>\cdots<\sigma_r>$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n,\sigma=\sigma_1\tilde{\sigma}_1} \varepsilon(\sigma)<\sigma_1><\tilde{\sigma}_1> \qquad ①$$

其中$<\tilde{\sigma}_1>=<\sigma_2>\cdots<\sigma_r>$.易知在$<\tilde{\sigma}_1>$中元素的足标不会出现 n.设$\sigma_1=(ni_2\cdots i_s)$,如果$\sigma_1$的长度小于等于2,由$A^*=A$知$a_{nn}, a_{ni_2}a_{i_2n}$为实数,那么

$$<\sigma_1>=a_{nn}\lambda=\lambda a_{nn}\text{或}<\sigma_1>=a_{ni_2}a_{i_2n}\lambda=\lambda a_{ni_2}a_{i_2n} \qquad ②$$

如果σ_1的长度大于2,定义$\overline{\sigma_1}=(ni_s\cdots i_3i_2)$,显然$\sigma_1\neq\tau_1$,当且仅当$\overline{\sigma_1}\neq\overline{\tau_1}$,因此这样的置换一定会成对出现,并且有

$$<\sigma_1>+<\overline{\sigma_1}>=(a_{ni_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{s-1}i_s}+a_{ni_s}a_{i_si_{s-1}}\cdots a_{i_3i_2}a_{i_2n})\lambda$$

$$=\lambda(a_{ni_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{s-1}i_s}a_{i_sn}+a_{ni_s}a_{i_si_{s-1}}a_{i_3i_2}a_{i_2n}) \qquad ③$$

上式可交换的理由是:由$A^*=A$得括号中的数为实数.从而有

$$\det A_\lambda = \sum_{\sigma\in S_n,\sigma=\sigma_1\overline{\sigma_1}} \varepsilon(\sigma)(a_{ni_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_sn}\lambda)<\bar{\sigma}>$$

$$=\lambda \sum_{\sigma\in S_n,\sigma=\sigma_1\overline{\sigma_1}} \varepsilon(\sigma)(a_{ni_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_sn})<\bar{\sigma}>$$

$$=\lambda \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)<\bar{\sigma}_1><\sigma_1>=\lambda\det A \qquad \square$$

定理 3.2.3 设$A\in SC_n(Q)$,则

$$\det P(i(\lambda))^* AP(i(\lambda))=\bar{\lambda}\lambda\det A \qquad (3.2.8)$$

证 由定理 3.2.2 及命题 3.2.4 与 3.2.5,有

$$\det P(i(\lambda))^* AP(i(\lambda))$$
$$=\det P(i,n)^* P(i(\lambda))^* AP(i(\lambda))P(i,n)$$
$$=\det(P(i,n)^* P(i(\lambda))^*)A(P(i(\lambda))P(i,n))$$
$$=\det P(n(\lambda))^* AP(n(\lambda))$$
$$=\bar{\lambda}\lambda\det A \qquad \square$$

命题 3.2.6 设$A\in SC_n(Q)$,则

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = 0, k=1,2,\cdots,n-1 \tag{3.2.9}$$

证 对于任意 $\sigma\in S_n$，在 σ 中 n 和 k 的位置有下列三种可能：

1° $\sigma=\sigma_1(k)=(np_1\cdots p_l)\cdots(kj_1\cdots j_t)\cdots, l,t\geqslant 0$

2° $\sigma=\sigma_2(k)=(np_1\cdots p_l)\cdots(n_hi_1\cdots i_skj_1\cdots j_t)\cdots, l,s,t\geqslant 0$

3° $\sigma=\sigma_3(k)=(np_1\cdots p_lkj_1\cdots j_t),\cdots, l,t\geqslant 0$

记式(3.2.9)中的矩阵为 $D_k(d_{ij}^{(k)})$，那么 $d_{nj}^{(k)}=a_{kj}=d_{kj}^{(k)}, j=1,2,\cdots,n$. 因此有

$$\langle\sigma_1(k)\rangle=\langle kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots\langle kj_1\cdots j_tk\rangle\cdots;$$

$$\langle\sigma_2(k)\rangle=\langle kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots\langle n_hi_1\cdots i_skj_1\cdots j_tn_h\rangle\cdots;$$

$$\langle\sigma_3(k)\rangle=\langle kp_1\cdots p_lkj_1\cdots j_tn\rangle\cdots;$$

又在 D_k 中，$d_{ij}^{(k)}=\overline{a_{ij}}=a_{ji}=d_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n-1$

因此对于 $1\leqslant j_1,j_2,\cdots,j_t\leqslant n-1$ 有

$$\overline{\langle j_1j_2\cdots j_t\rangle}=\langle j_tj_{t-1}\cdots j_1\rangle$$

在 1° 的情况下，定义

$$\sigma_1(k)^*=(nj_1\cdots j_tkp_1\cdots p_l)\cdots, l,t\geqslant 0$$

显然 $\sigma_1(k)\neq\tau_1(k)$ 当且仅当 $\sigma_1(k)^*\neq\tau_1(k)^*$. 再分两种情况：

ⓐ当 $t\leqslant 1$ 时，$\langle kj_1\cdots j_tk\rangle$ 为实数，因此有

$$\begin{aligned}\langle\sigma_1(k)\rangle&=\langle kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots\langle kj_1\cdots j_tk\rangle\cdots\\&=\langle kj_1\cdots j_tkp_1\cdots p_ln\rangle\cdots\\&=\langle\sigma_1(k)^*\rangle\end{aligned} \tag{①}$$

ⓑ当 $t>1$ 时，再定义

$$\overline{\sigma_1}(k)=(np_1\cdots p_l)\cdots(kj_tj_{t-1}\cdots j_1)\cdots, l\geqslant 0$$

显然，$\sigma_1(k)\neq\tau_1(k)$当且仅当$\overline{\sigma_1}(k)\neq\overline{\tau_1}(k)$，且可知满足条件 1°ⓑ的置换一定成对出现. 而我们又有

$$\begin{aligned}
&\langle\sigma_1(k)\rangle+\overline{\langle\sigma_1(k)\rangle}\\
&=\langle kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots[\langle kj_1\cdots j_tk\rangle+\langle kj_t\cdots j_1k\rangle]\cdots\\
&=\langle nj_1\cdots j_tkp_1\cdots p_ln\rangle\cdots+\langle nj_t\cdots j_1kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots\\
&=\langle\sigma_1(k)^+\rangle+\overline{\langle\sigma_1(k)^+\rangle}
\end{aligned}\qquad ②$$

上式交换的理由是由于方括号中的数为实数(下文中也如此).

在 2°的情况下，定义

$$\sigma_2(k)^*=(nj_1\cdots j_tk_{n_h}i_1\cdots i_skp_1\cdots p_l)\cdots, l,s,t\geqslant 0$$

显然，$\sigma_2(k)\neq\tau_2(k)$，当且仅当 $\sigma_2(k)^*\neq\tau_2(k)^*$，又分两种情况：

ⓐ当 $t,s=0$ 时，由于$\langle n_hkn_h\rangle$为实数，且

$$\begin{aligned}
\langle n_hkn_h\rangle&=\langle n_hk\rangle\{[\langle kn_h\rangle+\langle n_hk\rangle]-\langle n_hk\rangle\}\\
&=[\langle kn_h\rangle+\langle n_hk\rangle]\langle n_hk\rangle-\langle n_hk\rangle\langle n_hk\rangle\\
&=\langle kn_hk\rangle
\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}
\langle\sigma_2(k)\rangle&=\langle kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots\langle n_hkn_h\rangle\cdots\\
&=\langle kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots\langle kn_hk\rangle\cdots\\
&=\langle kn_hkp_1\cdots p_ln\rangle\cdots=\langle\sigma_2(k)^*\rangle
\end{aligned}\qquad ③$$

ⓑ当 $t\geqslant 1$ 或 $s\geqslant 1$ 时，再定义

$$\overline{\sigma_2(k)}=(np_1\cdots p_l)\cdots(n_hj_t\cdots j_1, ki_s\cdots i_1)\cdots, l,t,s\geqslant 0$$

显然，$\sigma_2(k)\neq\tau_2(k)$当且仅当$\overline{\sigma_2(k)}\neq\overline{\tau_2(k)}$，且可知满足条件 2°ⓑ的置换一定成对出现，而我们又有

$$\begin{aligned}
\langle\sigma_2(k)\rangle&=\langle kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots\langle n_hi_1\cdots i_sk\rangle\{[\langle kj_1\cdots j_tn_h\rangle\\
&\quad+\langle n_hj_t\cdots j_1k\rangle]-\langle n_hj_t\cdots j_1k\rangle\}\cdots\\
&=\langle kp_1\cdots p_ln\rangle\cdots\{\langle kj_1\cdots j_tn_hi_1\cdots j_sk\rangle\\
&\quad+\langle n_hj_t\cdots j_1k\rangle\langle n_hi_1\cdots i_sk\rangle
\end{aligned}$$

$$-<n_h i_1 \cdots i_s k><n_h i_t \cdots j_1 k>\} \cdots$$

类似地有

$$\begin{aligned}<\overline{\sigma_2(k)}> = <k p_1 \cdots p_l n> \cdots \{ & <k i_s \cdots i_1 n_h j_t \cdots j_1 k> \\ & + <n_h i_1 \cdots i_s k><n_h i_t \cdots i_1 k> \\ & - <n_h j_t \cdots j_1 k><n_h i_1 \cdots i_s k>\} \cdots\end{aligned}$$

那么有

$$\begin{aligned} & <\sigma_2(k)> + <\overline{\sigma_2(k)}> \\ = & <k p_1 \cdots p_l n> \cdots [<k j_1 \cdots j_t n_h i_1 \cdots i_s k> \\ & + <k i_s \cdots i_1 n_h j_t \cdots j_1 k] \cdots \\ = & [<k j_1 \cdots j_t n_h i_1 \cdots i_s k> \\ & + <k i_s \cdots i_1 n_h j_t \cdots j_1 k>]<k p_1 \cdots p_1 n> \cdots \\ = & [<k j_1 \cdots j_t n_h i_1 \cdots i_s k p_1 \cdots p_l n> \\ & + <k i_s \cdots i_1 n_h j_t \cdots j_1 k p_1 \cdots p_l n>] \cdots \\ = & <\sigma_2(k)^*> + <\overline{\sigma_2(k)}^*> \end{aligned} \quad ④$$

作为置换的集合,并集 $S=(1°ⓐ)\cup(1°ⓑ)\cup(2°ⓐ)\cup(2°ⓑ)$ 为不交并. 由前面所述对应 $\sigma_i(k)\rightarrow\sigma_i(k)^*$ $(i=1,2)$,为 S 到 3° 的单射,现对于 3°中的任一元 $\sigma_3(k)=(np_1\cdots p_l k j_1\cdots j_t)\cdots$;如果 $\max\{p_1,\cdots,p_l,k\}=k$,那么 1°中能找到一个置换与它对应. 如果 $\max\{p_1,\cdots,p_l,k\}>k$,那么在 2°中能找到一个置换与它对应. 由式(3.1.5)知 $\varepsilon(\sigma_i(k))=-\varepsilon(\sigma_i(k)^*)$ $(i=1,2)$,从而根据式①,②,③,④,得

$$\begin{aligned}\det D_k &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma(k))<\sigma(k)> \\ &= \sum_{\sigma_1(k)}\varepsilon(\sigma_1(k))<\sigma_1(k)> \\ &\quad + \sum_{\sigma_2(k)}\varepsilon(\sigma_2(k))<\sigma_2(k)> \\ &\quad + \sum_{\sigma_3(k)}\varepsilon(\sigma_3(k))<\sigma_3(k)>\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{\sigma_1(k)^*} \varepsilon(\sigma_1(k)^*) < \sigma_1(k)^* > \\
&\quad -\sum_{\sigma_2(k)^*} \varepsilon(\sigma_2(k)^*) < \sigma_2(k)^* > \\
&\quad +\sum_{\sigma_3(k)} \varepsilon(\sigma_3(k)) < \sigma_3(k) > \\
&= -\sum_{\sigma_3(k)} \varepsilon(\sigma_3(k)) < \sigma_3(k) > \\
&\quad +\sum_{\sigma_3(k)} \varepsilon(\sigma_3(k)) < \sigma_3(k) > = 0
\end{aligned}
$$
□

定理 3.2.4 设 $A \in SC_n(Q)$，若 A 中有两行元素对应相等，则

$$\det A = 0$$

证 设 A 中的第 h 行与第 k 行元素对应相等，则由 $A^* = A$ 知 A 的第 h 列与第 k 列的元素对应相等，于是由定理 3.2.2 知，

$$\det A = \det P(h,n)^* AP(h,n) = \det B$$

其中 B 是第 k 行与第 n 行元素对应相等的自共轭阵，则由命题 3.2.6 知 $\det B = 0$，故 $\det A = 0$. □

定理 3.2.5 设 $A \in SC_n(Q)$，若 A 的第 h 行（列）与第 k 行（列）成左（右）比例，即

$$a_{nj} = \lambda a_{kj} (a_{jh} = a_{jk}\lambda), j = 1, \cdots, n, \lambda \in Q$$

则

$$\det A = 0$$

证 因 $A^* = A$，故当 A 的 h 列与第 k 列成右比例，即 $a_{jh} = a_{jk}\lambda$ 时，A 的第 h 行与第 k 行成左比例即 $a_{hj} = \bar{\lambda} a_{kj}$，则由定理 3.2.2 及命题 3.2.4，命题 3.2.5 知（不妨设 $h \neq n$）

$$\det A = \det P(h,n)^* AP(h,n) = \bar{\lambda}\lambda \det B$$

其中 B 是第 k 行与第 n 行相同的自共轭矩阵，故由命题 3.2.6 知

$\det B=0$,从而 $\det A=0$. □

定理 3.2.6 设 $A\in SC_n(Q)$,则

$$\det P(i,j_\lambda)^* AP(i,j_\lambda)=\det A$$

证 设 $A=a_{ij}$,则因 $A^*=A$ 有 $a_{ji}=\bar{a}_{ij}$,于是由命题 3.2.1 及定理 3.2.5 知

$$\det P(i,j_\lambda)^* AP(i,j_\lambda)$$

$$=|A|+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{i\text{列}}{a_{ij}\lambda} & \cdots & \overset{j\text{列}}{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}\lambda & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}\lambda & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{\lambda}a_{j1} & \cdots & \bar{\lambda}a_{ji} & \cdots & \bar{\lambda}a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ (j\text{行}) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{i\text{列}}{a_{1j}\lambda} & \cdots & \overset{j\text{列}}{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{\lambda}a_{j1} & \cdots & \bar{\lambda}a_{ji}\lambda & \cdots & \bar{\lambda}a_{ji} & \cdots & \bar{\lambda}a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji}\lambda & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}\lambda & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ (j\text{行}) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$= |A| + 0 + 0 + 0 = \det A$ □

推论 设 $A \in SC_n(Q)$，S 是由 $P(i,j)$ 与 $P(l,k_\lambda)$ 组成的一系列初等矩阵之积，则

$$\det S^* AS = \det A$$

证 由定理3.2.2与定理3.2.6即可推得. □

定理3.2.7 设 $A \in SC_n(Q)$，$U \in U^{n\times n}$，则

$$\det UAU^* = \det A$$

证 因 $U \in U^{n\times n}$，则 $UU^* = I$，因而 U 经过若干次列的消法变换可化为 $V = \mathrm{diag}(1,\cdots,1,a)(a \neq 0)$，即存在消法矩阵 P_1，$\cdots$，P_t，使 $UP_1\cdots P_t = V^{[1]}$，于是

$$UP_1\cdots P_tP(n(a^{-1})) = I$$

由此可知

$$U^* = P_1\cdots P_tP(n(a^{-1}))$$

从而有

$$\begin{aligned} 1 &= \det UU^* \\ &= \det P(n(a^{-1}))^* P_t^* \cdots P_1 IP_1 \cdots P_tP(n(a^{-1})) \\ &= \overline{a^{-1}}a^{-1}\det I = |a^{-1}|^2 \end{aligned}$$

于是便得到

$$\begin{aligned} &\det UAU^* \\ &= \det P(n(a^{-1}))^* P_t^* \cdots P_1^* AP_1 \cdots P_t^* P(n(a^{-1}))^* \\ &= \det P(n(a^{-1}))^* AP(n(a^{-1})) \\ &= |a^{-1}|^2 \det A = \det A \end{aligned}$$ □

§3.3 四元数矩阵的重行列式及其性质

在上两节，虽然已给四元数矩阵的行列式下了定义，但它一般不具有常规行列式的诸性质，然而我们注意到对自共轭四元数矩

阵来说，常规行列式的一些性质仍类似成立. 于是启发人们用 A^*A 的行列式代替 A 的行列式，这就是由陈龙玄教授于 1991 年首先提出的所谓四元数矩阵重行列式的概念，并建立了重行列式理论. 这一理论在解决四元数体上线性代数的一些重大问题的过程中显示出较大的优越性.

定义 3.3.1 设 $A\in Q^{n\times m}$，则定义 A 的**重行列式**为

$$\|A\| = |A^*A| \tag{3.3.1}$$

命题 3.3.1 设 $A\in SC_n(Q)$，则存在由 $P(i,j)$，$P(l,k_\lambda)$ 组成的一系列初等矩阵之积 $P_1P_2\cdots P_t=S$，此 S 可逆，且 S^{-1} 仍为这类初等矩阵之积，使

$$S^*AS=\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n),c_i\in R,i=1,\cdots,n \tag{3.3.2}$$

证 对 A 的阶数 n 作数学归纳法. 当 $n=1$ 时，显然命题成立. 设 A 为 $n-1$ 阶时，命题成立，现对 n 阶自共轭阵 $A=(a_{ij})$ 来证明命题成立.

若 $a_{11}\neq 0$，为了把位于第 i 列第 1 行的矩阵元素化为零，作"把第 1 列的右 $(-a_{11}{}^{-1}a_{i1})$ 倍加到第 i 列"的初等变换，为此只要把相应的初等矩阵

$$P_i=P(i,(-a_{i1}a_{11}{}^{-1})1),i=2,\cdots,n$$

逐个右乘于 A，就得到

$$AP_2P_3\cdots P_n=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ C & B_{n-1}\end{pmatrix}$$

其中 $C=(a_{21},a_{31},\cdots,a_{n1})^{\mathrm{T}}$，$B_{n-1}$ 为 $n-1$ 阶方阵，注意到把 P_i $(i=2,\cdots,n)$ 的转置共轭矩阵 $P_i{}^*$ $(i=2,\cdots,n)$ 左乘于 A 时，就实现"把第 1 行的左 $(-a_{11}{}^{-1}a_{1i})$ 倍加到第 i 行"的初等变换，于是有

$$P_n^*\cdots P_2{}^*P_1{}^*AP_1P_2\cdots P_n=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & A_{n-1}\end{pmatrix} \qquad ①$$

其中 $P_1=I_n$，而 $n-1$ 阶方阵 A_{n-1} 仍为自共轭阵. 由归纳假设，它已经可用初等变换化成实对角阵，当对式①右端的方阵 A_{n-1} 作初等变换时，并不影响①中已形成的第 1 行和第 1 列，于是当 $a_{11}\neq 0$ 时，命题已经证明.

当 $a_{11}=0$ 时，若有某 $a_{tt}\neq 0(t=2,3,\cdots,n)$，则在自共轭阵 $B=P^*(1,t)AP(1,t)$ 中，位于第 1 行第 1 列的元素是 $a_{tt}\neq 0$，已属上面讨论过的情形.

当所有 a_{tt} 均等于零时，则 $a_{i1}(i=2,3,\cdots,n)$ 中至少有一个不为零，否则 A 中的第 1 行、第 1 列皆为零，可归纳为 $n-1$ 的情形. 若有某 $a_{ij}\neq 0(2\leqslant j\leqslant n)$，则有

$$P^*(1,j_1)AP(1,j_1)=\begin{pmatrix}2a_{1j} & L\\ L^* & A_{n-1}\end{pmatrix}$$

其中 $L\in Q^{1\times(n-1)}$，$A_{n-1}\in SC_{n-1}(Q)$，而由

$$2a_{1j}\neq 0$$

问题归结为上面已讨论过的情形. 于是命题得证. □

推论 设 $A\in SC_n^{>}(Q)$，则存在由 $P(i,j)$，$P(l,k_\lambda)$ 组成的一系列初等矩阵之积 $P_1P_2\cdots P_t=S$，此 S 可逆，且 S^{-1} 仍为这类初等矩阵之积，使

$$S^*AS=\operatorname{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n),c_t>0,i=1,\cdots,n \qquad (3.3.2)'$$

定理 3.3.1 设 $A\in Q^{n\times m}$，则

$$\|A\|\geqslant 0 \qquad (3.3.3)$$

证 因 A^*A 为自共轭矩阵，故由命题 3.3.1 知，存在由 $P(i,j)$，$P(l,k_\lambda)$ 组成的一系列初等矩阵之积 $P_1P_2\cdots P_t=S$，此 S 可逆，且 S^{-1} 仍为这类初等矩阵之积，使

$$S^*A^*AS=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\lambda_i\in R,i=1,2,\cdots,n \qquad (3.3.4)$$

故 $\|A\|=\det A^*A=\det S^*A^*AS$

$$= |\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \in R \tag{3.3.5}$$

由式(3.3.4)又有

$$\begin{aligned}\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2\cdots\lambda_n) &= (AS)^*(AS)\\ &= (\beta_1\beta_2, \cdots\beta_n)^*(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n),\end{aligned}$$

其中 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 是 AS 的列向量，上式表明，S 把 A 的列向量正交化为

$$(\beta_i, \beta_j) = \delta_{ij}\lambda_j, \lambda_j = (\beta_j, \beta_j) = \beta_j^*\beta_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n \tag{3.3.6}$$

于是由式(3.3.5)及(3.3.6)即得

$$\| A \| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \geqslant 0. \qquad \square$$

定理 3.3.2 设 $A \in Q^{n \times n}$，则

$$\| A^* \| = \| A \| \tag{3.3.7}$$

证 首先由定义 3.1.1 可直接验明

$$\det\begin{pmatrix} -I & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & -I \end{pmatrix} \qquad ①$$

因左端展开后的每一项也是右端中的项，反之亦然，故相等.

其次，$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$可表为一系列初等矩阵 $P(i, j_\lambda)$ 之积，利用定理 3.2.6，式①及命题 3.2.2，即得

$$\begin{aligned}(-1)^n \| A^* \| &= (-1)^n |AA^*| = \det\begin{pmatrix} AA^* & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ A^* & I \end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & -I \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -I & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix} I & 0 \\ A^* & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & A^*A \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n |A^*A| = (-1)^n \| A \|$$

故式(3.3.7)成立. □

定理 3.3.3 设 $A, B \in Q^{n\times n}$,则

$$\| AB \| = \| A \| \ \| B \| \tag{3.3.8}$$

证 由式(3.3.4)~(3.3.7),可得

$$\begin{aligned} \| AB \| &= |B^*(A^*A)B| = |B^*(S^*)^{-1}S^*(A^*A)SS^{-1}B| \\ &= |(S^{-1}B)^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)(S^{-1}B)| \\ &= |(\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) S^{-1}B)^* (\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \\ &\quad \cdots, \sqrt{\lambda_n}) S^{-1}B)| \\ &= \| \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) S^{-1}B \| \\ &= \| (\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) S^{-1}B)^* \| \\ &= \| (S^{-1}B)^* \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) \| \\ &= \| (S^{-1}B)^* \| \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \\ &= \| (S^{-1}B) \| \ \| A \| = \| B \| \ \| A \| = \| A \| \ \| B \| \end{aligned}$$ □

推论 设 $A, B \in Q^{n\times n}$,若 $A \sim B$,则

$$\| A \| = \| B \| \tag{3.3.9}$$

证 由 $A \sim B$,则存在可逆阵 $P \in Q^{n\times n}$,使

$$PAP^{-1} = B$$

于是由定理 3.3.3,即得

$$\begin{aligned} \| B \| &= \| PAP^{-1} \| = \| P \| \ \| P^{-1} \| \ \| A \| \\ &= \| PP^{-1} \| \ \| A \| = \| I \| \ \| A \| = \| A \| \end{aligned}$$ □

定理 3.3.4 设 $P = P(i, j), T = P(i, j_\lambda), G = P(i(\lambda))$,

1° 当 $A \in Q^{n\times m}$ 时,则有

$$\left.\begin{aligned} &\| AP \| = \| A \|, \| PA \| = \| A \|, \\ &\| AT \| = \| A \|, \| AG \| = \bar{\lambda}\lambda \| A \| \end{aligned}\right\} \tag{3.3.10}$$

2° 当$A \in Q^{n\times n}$时,则有

$$\| TA \| = \| AT \| = \| A \| \qquad (3.3.11)$$

$$\| GA \| = \| AG \| = \bar{\lambda}\lambda \| A \| \qquad (3.3.12)$$

3° 当$A \in Q^{n\times n}$时,若 A 的第h 列(行)是第 k 列(行)的右 λ(左 λ)倍($h \neq k$),则有

$$\| A \| = 0 \qquad (3.3.13)$$

证 1° 因为$A^* A$ 自共轭,由定理 3.2.2 及定理 3.2.6,有

$$\| AP \| = |(AP)^* AP| = |P^* A^* AP| = |A^* A| = \| A \|$$

$$\| PA \| = |A^* (P^* P)A| = |A^* IA| = |A^* A| = \| A \|$$

$$\| AT \| = |T^* (A^* A)T| = |A^* A| = \| A \|$$

$$\| AG \| = |G^* (A^* A)G| = \bar{\lambda}\lambda |A^* A| = \bar{\lambda}\lambda \| A \|.$$

2° 当$A \in Q^{n\times n}$,由定理 3.3.2,有

$$\| TA \| = \| (TA)^* \| = |(TA)(TA)^*| = |T(AA^*)T^*|$$
$$= |AA^*| = \| A^* \| = \| A \|.$$

由定理 3.2.6,有

$$\| AG \| = |G^* A^* AG| = \bar{\lambda}\lambda |A^* A| = \bar{\lambda}\lambda \| A \|$$

由定理 3.3.2 及定理 3.2.6,有

$$\| GA \| = \| (GA)^* \| = |(GA)(GA)^*| = |G(AA^*)G^*|$$
$$= \bar{\lambda}\lambda |AA^*| = \bar{\lambda}\lambda \| A^* \| = \bar{\lambda}\lambda \| A \|$$

3° 由$A^* A$ 为自共轭阵及定理 3.2.4 即知

$$\| A \| = |A^* A| = 0 \qquad \square$$

设 $A = (a_{ij}) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in Q^{n\times n}$,其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是A 的列向量.由 A 引进列向量

$$\omega_j = \det\begin{pmatrix} \alpha_1^+ \\ \vdots \\ \alpha_{j-1}^+ \\ \alpha_n^+ \\ \alpha_{j+1}^+ \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^+ \\ 1 \end{pmatrix} (\alpha_1 \cdots \alpha_{j-1} \alpha_n \alpha_{j+1} \cdots \alpha_{n-1} \alpha_j), j = 1, 2, \cdots, n$$

(3.3.14)

这样的记法是为了简便和醒目.这里约定 $1\alpha_k = \alpha_k$.可以证明

$$(\alpha_k, \omega_j) = \delta_{kj} \| A \|, k, j = 1, 2, \cdots, n \qquad (3.3.15)$$

设 $\omega_j = (w_{1j}, \cdots, w_{ij}, \cdots, w_{nj})^{\mathrm{T}}$,记矩阵 $W = (w_{ij})_{n\times n}$,则式(3.3.15)可写成

$$\sum_{t=1}^{n} \bar{a}_{tk} w_{tj} = \sum_{t=1}^{n} a_{kt}^{*} w_{tj} = \delta_{kj} \| A \|, \; k, j = 1, 2, \cdots, n$$

(3.3.16)

定理 3.3.5 四元数体上的方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 可逆的充分必要条件是它的重行列式 $\| A \| \neq 0$,且 $A^{-1} = (b_{jk})$,b_{jk} 如式(3.3.19)所示.

证 因 A 可逆,即存在 A^{-1},使 $A^{-1}A = I$,由定理 3.3.3 有,$1 = \| I \| = \| A^{-1}A \| = \| A^{-1} \| \cdot \| A \|$,故 $\| A \| \neq 0$.

当 $\| A \| \neq 0$,由式(3.3.16)得到 $A^* W = I \| A \|$,或

$$\frac{1}{\| A \|} W^* A = I \qquad (3.3.17)$$

可见此时存在 A 之左逆.由定理 3.3.2,$\| A^* \| = \| A \| \neq 0$,因此 A^* 也存在左逆,即同时存在 A 之右逆,而右逆必然等于左逆,故 A 存在唯一的逆矩阵 A^{-1} 如式(3.3.17),即

$$A^{-1}=\frac{1}{\| A \|}W^{*}=(b_{jk}),\ \bar{b}_{jk}=\frac{1}{\| A \|}w_{kj}$$

依定义 3.3.1 展开式(3.3.14),向量 ω_j 可表为

$$\omega_j=\det(\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha_n\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{n-1},1)^{*}(\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha_n\alpha_{j+1}\cdots$$

$$\alpha_{n-1}\alpha_j)=\sum_{t=1}^{n}\alpha_t c_{tj} \tag{3.3.18}$$

令 $\delta_k=(0\cdots010\cdots0)^{\mathrm{T}}$,其中“1”在第 k 个位置,则

$$w_{kj}=\delta_k{}^{*}\omega_j=(\delta_k,\omega_j)=(\delta_k,\ \sum_{t=1}^{n}\alpha_t c_{tj})=\sum_{t=1}^{n}(\delta_k,\alpha_t)c_{tj}$$

由式(3.3.18),最后得到

$$\bar{b}_{jk}=\frac{1}{\| A \|}w_{kj},w_{kj}=\det(\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha_n\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{n-1},\delta_k)^{*}$$
$$(\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha_n\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{n-1}\alpha_j),\quad j,k=1,2,\cdots,n \tag{3.3.19}$$

定义 3.3.2 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 $\| A \|\neq 0$,则称 A 为**非奇异矩阵**,否则称为**奇异矩阵**.

由定理 3.3.5 及定义 3.3.2,可得如下

推论 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 可逆$\Leftrightarrow A$ 非奇异.

定义 3.3.3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 Q 上的 r 个 n 维列向量,若存在不全为零的四元数 $c_1,c_2,\cdots,c_r$ 使得

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_r\alpha_r=0$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为**左线性相关**,否则称为**左线性无关**.同样可定义**右线性相关**和**右线性无关**.

定理 3.3.6 设 $A_{n\times m}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in Q^{n\times m}$,则列向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 右线性无关的充分必要条件是 $\| A_{n\times m} \|\neq 0$.

证 当 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 右线性相关时,无妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s(s<m)$ 是它的一个极大右线性无关组,于是存在由若干个初等矩阵 $P(i,j),P(k,l_\lambda)$ 之积 S,使

$$A_{n\times m}S=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)S=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,0,\cdots,0),s<m$$

由定理 3.3.2,得到

$$\begin{aligned}\|A_{n\times m}\|&=\|A_{n\times m}S\|=\|(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,0,\cdots,0)\|\\&=\|(A_s,0)\|=\det\begin{pmatrix}A_s^*A_s&0\\0&0\end{pmatrix}=0\end{aligned}\qquad(3.3.20)$$

所以,当 $\|A_{n\times m}\|\neq 0$ 时,它的列向量组只能是右线性无关的.

再证必要性.设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 右线性无关,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 都不是零向量.显然存在若干个行的初等变换 $P(i,j)$ 和列的初等变换 $T=P(k,l_\lambda)$,使

$$A_{n\times m}\to\begin{pmatrix}c_1&0\cdots0\\ *&\\ \vdots&*\\ *&\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}c_1&0&\cdots\cdots0\\ *&c_2&0\cdots0\\ \vdots&*&\\ *&\vdots&*\\ &*&\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}c_1&&0\\&c_2&\\&&\ddots\\&*&&c_m\\&&*&\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}c_1&&0\\&c_2&\\&&\ddots\\&&&c_m\\&&B&\end{pmatrix}$$

即存在初等矩阵之积 P 和 T,使

$$PA_{n\times m}T=\begin{pmatrix}c_1&&0\\&c_2&\\&&\ddots\\0&&&c_m\\&&B&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C\\B\end{pmatrix},\quad c_1c_2\cdots c_m\neq0\qquad(3.3.21)$$

于是由式(3.3.10),有

$$\|A_{n\times m}\|=\|PA_{n\times m}\mathrm{T}\|=\left\|\begin{pmatrix}C\\B\end{pmatrix}\right\|=\det(C^*C+B^*B)$$

$$= \det\begin{pmatrix} b_{11}+\bar{c}_1c_1 & b_{21}+0 & \cdots & b_{1n}+0 \\ b_{21}+0 & b_{22}+\bar{c}_2c_2 & \cdots & b_{2n}+0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n+1}+0 & b_{n2}+0 & \cdots & b_{nn}+\bar{c}_nc_n \end{pmatrix}$$

其中 $B^*B=(b_{ij})_{m\times m}$. 再利用命题 3.2.1 及 3.2.2,把上行列式按行完全拆开,得到若干个都是自共轭的行列式,它们可以调整成对角块形式,再利用定理 3.3.2 得知它们的值都非负,于是得出

$$\begin{aligned} \| A_{n\times m} \| &= \det C^* C + \det B^* B + \cdots \\ &= \bar{c}_1c_1\bar{c}_2c_2\cdots\bar{c}_mc_m + \| B \| + \cdots \\ &\geqslant \bar{c}_1c_1\bar{c}_2c_2\cdots\bar{c}_mc_m > 0 \end{aligned}$$

□

注 即使 $m=n$, A 是方阵的情形,列向量右线性无关的条件 $\| A \| \neq 0$,也不能用行列式 $|A| \neq 0$ 代替. 例如:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix}\mathrm{j}=\begin{pmatrix} \mathrm{k} \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}; \quad \beta_1=\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{j} \end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix} \mathrm{k} \\ 1 \end{pmatrix}$$

α_1, α_2 右线性相关,而

$$\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{k} \\ \mathrm{k} & -\mathrm{i} \end{vmatrix} = -\mathrm{i}^2-\mathrm{k}^2=2\neq 0$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathrm{i} & \mathrm{k} \\ \mathrm{k} & -\mathrm{i} \end{matrix} \right\| = \det\begin{pmatrix} 2 & 2\mathrm{j} \\ -2\mathrm{j} & 2 \end{pmatrix} = 0$$

β_1, β_2 右线性无关,而

$$\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{k} \\ \mathrm{j} & 1 \end{vmatrix} = \mathrm{i}-\mathrm{jk}=\mathrm{i}-\mathrm{i}=0, \quad \left\| \begin{matrix} \mathrm{i} & \mathrm{k} \\ \mathrm{j} & 1 \end{matrix} \right\| = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4\neq 0$$

定理 3.3.7 设 $A\in Q^{n\times n}$, $B\in Q^{m\times m}$, $C\in Q^{m\times n}$, $D\in Q^{n\times m}$,则

$$\left\| \begin{matrix} A & D \\ 0 & B \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} A & 0 \\ C & B \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & A \\ B & C \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} D & A \\ B & 0 \end{matrix} \right\| = \| A \| \, \| B \| \tag{3.3.22}$$

证 先证
$$\begin{Vmatrix} A & D \\ 0 & B \end{Vmatrix} = \| A \| \; \| B \|$$
记 $G=\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$，则
$$\| G \| = \det G^* G = \det\begin{pmatrix} A^* & 0 \\ D^* & B^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} A^* A & A^* D \\ D^* A & D^* D + B^* B \end{pmatrix} \qquad ①$$

显然，当 $\| A \| = 0$ 时，由定理 3.3.6 知 A 的列向量右线性相关，则 G 的前 n 个列向量亦右线性相关，故 $\| G \| = 0$，此时定理成立.

若 $\| A \| \neq 0$，则由定理 3.3.5 知，A 可逆，从而 A^* 亦可逆. 记 $S=\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$，则 S 可分解为一系列初等矩阵 $P_{n+m}(i, j_\lambda)$ 的乘积，由于对任意的 $P_{n+m}(i, j_\lambda)$ 都有
$$| P_{n+m}(i, j_\lambda)^* (G^* G) P_{n+m}(i, j_\lambda) | = | G^* G |$$
故由式①及命题 3.2.2 有
$$\| G \| = | G^* G | = | S^* G^* G S |$$
$$= \det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^*(A^{\mathrm{T}})^* & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^* A & A^* D \\ D^* A & D^* D + B^* B \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}D \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A^* A & 0 \\ 0 & B^* B \end{pmatrix}$$
$$= | B^* B | \, | A^* A | = \| B \| \; \| A \| = \| A \| \; \| B \|$$
同理可证其他情形. □

定理 3.3.8 设 $A \in Q^{n\times n}$，$B \in Q^{n\times m}$，$C \in Q^{m\times n}$，$D \in Q^{m\times m}$，且 A 可逆，则
$$\begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} = \| A \| \; \| D - CA^{-1}B \| \qquad (3.3.23)$$

证 当 A 可逆时,我们有

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

而$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_m \end{pmatrix}$是一系列初等矩阵 $P(i,j_\lambda)$之积,于是由式(3.3.11)及定理 3.3.7 即得所证. □

定理 3.3.9 设 $A\in Q^{n\times n}$, $D\in Q^{m\times m}$,且皆可逆,$B\in Q^{n\times m}$,$C\in Q^{m\times n}$,则有

$$\| D-CA^{-1}B \| = (\| A \|)^{-1}\| D \| \| A-BD^{-1}C \| \tag{3.3.24}$$

证 因为有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

而$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_m \end{pmatrix}$是一系列初等矩阵 $P(i,j_\lambda)$之积,故由式(3.3.11)及定理 3.3.7,有

$$\left\| \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \right\| = \| A-BD^{-1}C \| \| D \| \tag{3.3.25}$$

于是由式(3.3.23)与(3.3.25),有

$$\| A \| \| D-CA^{-1}B \| = \| A-BD^{-1}C \| \| D \| \tag{3.3.26}$$

由此即得式(3.3.24). □

定理 3.3.10 设 $A\in SC_n^{>}(Q)$,则

$$|A| = \det A = \| A \|^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.27}$$

证 因 $A\in SC_n^{>}(Q)$,则存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$(见后面定理 4.3.2)使 $A=PP^*$,于是由定理 3.3.3 及定理 3.3.2,有

$$\| A \| = \| PP^* \| = \| P \| \| P^* \| = \| P \|^2$$

$$|A| = |PP^*| = \| P^* \| = \| P \|$$

故 $|A|^2 = \| A \|$,即 $|A| = \| A \|^{\frac{1}{2}}$. □

推论 设 $A \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则

$$|A| = \det A = \| A \|^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.27$'$}$$

证 对任意实数 $\varepsilon > 0$，则 $A + \varepsilon I \in SC_n^{>}(Q)$，由定理3.3.10，有

$$|A + \varepsilon I| = \| A + \varepsilon I \|^{\frac{1}{2}}$$

在上式中，令 $\varepsilon \to 0^+$，即得

$$|A| = \| A \|^{\frac{1}{2}}$$ □

定理3.3.11 设 $A \in SC_n^{>}(Q)$，则对任意可逆阵 $P \in Q^{n \times n}$，有

$$|PAP^*| = |PP^*||A| \tag{3.3.28}$$

证 由定理3.3.2，有

$$\| PAP^* \| = \| P \| \| A \| \| P^* \| = \| PP^* \| \| A \|$$

再由上式及定理3.3.10，即有

$$\begin{aligned} |PAP^*| &= \| PAP^* \|^{\frac{1}{2}} = \| PP^* \|^{\frac{1}{2}} \| A \|^{\frac{1}{2}} \\ &= |PP^*||A| \end{aligned}$$ □

推论 设 $A \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则对任意可逆阵 $P \in Q^{n \times n}$，有

$$|PAP^*| = |PP^*||A|$$

证 对任意 $\varepsilon > 0$，则有 $A + \varepsilon I \in SC_n^{>}(Q)$，由定理3.3.11有

$$|P(A + \varepsilon I)P^*| = |PP^*||A + \varepsilon I|$$

在上式中令 $\varepsilon \to 0^+$，即得

$$|PAP^*| = |PP^*||A|$$ □

§3.4 四元数矩阵的重行列式与逆矩阵的计算

由上我们看到，重行列式在解决四元数体上线性代数的一些重大问题有着很大的优越性，但四元数体上的重行列式和逆矩阵若按定义计算是相当麻烦的.下面给出四元数矩阵重行列式与逆

矩阵的具体计算.

定理3.4.1 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\in Q^{n\times n}$为上三角阵,则

$$\| A \| = |\lambda_1|^2\cdots|\lambda_n|^2 \tag{3.4.1}$$

当 A 为下三角阵时也有类似结果.

证 由定理3.3.7即得. □

定理3.4.2 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 $\| A \|\neq 0$,则存在可逆阵 $S\in Q^{n\times n}$,且 S 是一系列初等阵 $P(i,j)$与 $P(i,j_\lambda)$之积,使 $SA=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$,从而有 $\| A \| = |\lambda_1|^2|\lambda_2|^2\cdots|\lambda_n|^2$.

证 实际上只需证明矩阵 A 可通过一系列行(左)初等变换化为上三角阵即可.

对 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in Q^{n\times n}$,我们按以下几步进行:

1. 若 $a_{11}\neq 0$,第1行左乘以 $-a_{i1}a_{11}^{-1}$加至第 i 行($i=2,\cdots,n$),此举可将 a_{11}所在列中 a_{11}以下的元素皆化为0,再转至第4步;

2. 若 $a_{11}=0$,但 $a_{ii}\neq 0(i\in\{2,3,\cdots,n\})$,则互换第1行与第 i 行,再回至第1步;

3. 若 $a_{11}=a_{21}=\cdots=a_{n1}=0$,则显然有 $\| A \| =0$;

4. 将去掉第1行与第1列余下的子阵重复上述作法,直至最后可将 A 通过行(左)初等变换化为上三角形阵 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$,此时即有 $\| A \| = |\lambda_1|^2|\lambda_2|^2\cdots|\lambda_n|^2$. □

容易看出,上述定理的证明过程就是四元数重行列式的一种计算方法,它相当于实数域或复数域上的行列式的消元法.此方法中四元数的乘法运算次数约有$\frac{1}{3}n^3$次,与按定义3.1.1进行计算

所需约$(n-1)n!$的计算量相比较，当 n 较大时，要少得多，且便于编程计算.

由定理3.3.5知对 $A\in Q^{n\times n}$，当 $\|A\|\neq 0$ 时，A 是可逆的，由定理3.4.1结合定理3.4.2并仿照复数域上做法容易证得如下

定理3.4.3 设 $A\in Q^{n\times n}$，$\|A\|\neq 0$，则存在可逆阵 $T\in Q^{n\times n}$，且 T 是一系列初等阵 $P(i,j)$，$P(i,j_\lambda)$ 和 $P(i(\lambda))$ 之乘积，使得 $TA=E$，此时有 $A^{-1}=T$.

此定理告诉我们，$Q^{n\times n}$ 中可逆阵 A 必可通过一系列行(左)初等变换化为单位矩阵 I_n，因此，我们可以把复数域上求逆阵的初等变换法移植到四元数体.

对 $A\in Q^{n\times n}$，作矩阵 $B=(A,I_n)\in Q^{n\times 2n}$，对 B 只作行的(左)初等变换，直到将 B 化为形式(I_n,T)，此时 T 即为A^{-1}，若此过程不能完成，则必有 $\|A\|=0$，即 A 不可逆. 此法中四元数乘法运算量约为$\frac{1}{3}n^3$次，比用定理3.3.5中给出的公式中的所需的 $n^3n!$的计算量要简化多了，且易于编程计算.

§3.5 四元数矩阵行列式的其他定义

本节简要地介绍四元数矩阵的行列式的其他定义.

谢邦杰教授对 n 阶四元数矩阵 A 的行列式(不妨记为$|A|_1=\det_1 A$)是这样间接定义的：如果 $\lambda I-A$ 能由定义2.1.3中所规定的三类初等变换化简成

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \varphi_1(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varphi_s(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中$\varphi_1(\lambda)|\varphi_2(\lambda)|\cdots\varphi_s(\lambda)$为$R$上的首系数为1的多项式，则定义

$$|A|_1=\det_1 A=(-1)^n\varphi_1(0)\cdots\varphi_s(0)$$

而对自共轭四元数矩阵A来说，上述行列式的定义可等价地叙述为如下：

定义 3.5.1 设$A=(a_{ij})\in SC_n(Q)$，则定义

$$|A|_1=\det_1 A=\det_1\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\triangleq\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{n_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots\overbrace{a_{i_{s-1}i_s}a_{i_sn_1}}a_{n_2j_2}\cdots a_{j_tn_2}\cdots a_{n_rk_2}\cdots a_{k_ln_r}\tag{3.5.1}$$

其中S_n是n文字的对称群，σ的循环表示应写成如下正规式：

$$\sigma=(n_1i_2i_3\cdots i_s)(n_2j_2j_3\cdots j_t)\cdots(n_rk_2k_3\cdots k_l)\tag{3.5.2}$$

$$n_1<i_2,\cdots,i_s;n_2<j_2,\cdots,j_t;\cdots;n_r<k_2,\cdots,k_l\tag{3.5.3}$$

$$1=n_1<n_2<\cdots<n_r\leqslant n\tag{3.5.4}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma)&=(-1)^{(s-1)+(t-1)+\cdots+(l-1)}\\&=(-1)^{n-r}\end{aligned}\tag{3.5.5}$$

同样可以证明下述

定理 3.5.1 设$A\in SC_n(Q)$，则有

1° $\det_1 P(i,j)^*AP(i,j)=\det_1 A$

2° $\det_1 P(i,j_\lambda)^*AP(i,j_\lambda)=\det_1 A$

3° $\det_1 P(i(\lambda))^*AP(i(\lambda))=\bar{\lambda}\lambda\det_1 A$

谢邦杰意义下的四元数矩阵行列式的研究，在20世纪80～90年代中获得了不少成果，对四元数矩阵的研究起了较大的推动作用.

我们指出，对于一般的四元数矩阵 A 来说，$|A|$ 与 $|A|_1$ 不一定相等，例如取

$$A=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{k} \\ \mathrm{j} & 1 \end{pmatrix}$$

则有 $|A|=a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}=1\cdot\mathrm{i}-\mathrm{j}\cdot\mathrm{k}=\mathrm{i}-\mathrm{i}=0$

$$|A|_1=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\mathrm{i}\cdot 1-\mathrm{k}\cdot\mathrm{j}=\mathrm{i}+\mathrm{i}=2\mathrm{i}$$

故

$$|A|\neq|A|_1$$

但是对于自共轭四元数矩阵来说，陈龙玄意义下的行列式与谢邦杰意义下的行列式是一样的，即这时定义 3.2.1 与定义 3.5.1 是等价的.事实上，我们有如下

定理 3.5.2 设 $A\in SC_n(Q)$，则

$$|A|_1=|A|$$

证 因 $A^*=A$，则由命题 3.3.1 知，存在可逆阵 $S\in Q^{n\times n}$，且 S 由 $P(i,j)$，$P(l,k_\lambda)$ 组成的一系列初等矩阵之积，使得

$$S^*AS=\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_n),c_i\in R,i=1,\cdots,n$$

于是由定理 3.2.2 及定理 3.2.6，有

$$\det A=\det(\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_n))=c_1c_2\cdots c_n$$

同样由定理 3.5.1，亦有

$$\det{}_1A=c_1c_2\cdots c_n$$

故

$$|A|_1=|A| \qquad \square$$

此外，四元数矩阵 A 的行列式还有如下一种定义，不妨称之为四元数矩阵 A 的拟行列式.

定义 3.5.1 设 $A\in Q^{n\times n}$，且 $A=A_1+A_2\mathrm{j}$，$A_1,A_2\in C^{n\times n}$，

$$A^\sigma=\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix}\in C^{2n\times 2n} \tag{3.5.6}$$

则定义 A 的**拟行列式**为 $2n$ 阶复矩阵 A^σ 的行列式，即

$$\mathrm{qdet}A=\det A^\sigma=|A^\sigma|=\begin{vmatrix} A_1 & -A_2 \\ \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{vmatrix} \tag{3.5.7}$$

拟行列式保持行列式的一些重要性质，例如：$A\in Q^{n\times n}$可逆当且仅当 $\mathrm{qdet}A\neq 0$；对任意 A、$B\in Q^{n\times n}$，有 $\mathrm{qdet}AB=\mathrm{qdet}A\,\mathrm{qdet}B$；准三角分块方阵的拟行列式等于其对角块拟行列式的乘积等. 但是也有一些行列式经典性质对拟行列式不成立，例如：行列式不是行(列)的线性函数；其 Lpalace 展开公式不再成立等等. 但拟行列式还有一些性质.

定理 3.5.3

1° 设$A\in Q^{n\times n}$，则 $\mathrm{qdet}A\in R$；

2° 若$A\in C^{n\times n}$，则 $\mathrm{qdet}A\geqslant 0$.

证 1° 设$A=A_1+A_2j$，$A_1,A_2\in C^{n\times n}$，则

$$A^\sigma=\begin{pmatrix}A_1 & -A_2\\ \overline{A}_2 & \overline{A}_1\end{pmatrix}$$

于是
$$\overline{\mathrm{qdet}A}=\overline{\det A^\sigma}=\begin{vmatrix}\overline{A}_1 & -\overline{A}_2\\ A_2 & A_1\end{vmatrix}$$

把这个复行列式作如下变换：

1) 以 -1 乘第 $1,3,\cdots,2n-1$ 行和列；

2) 第 t 行与第 $t+1$ 行对换，同时第 t 列与第 $t+1$ 列对换，$t=1,3\cdots,2n-1$.

按行列式的性质，上述变换不改变此复行列式的值，但另一方面，变换之后的行列式成为 $\det A^\sigma=\mathrm{qdet}A$，故 $\mathrm{qdet}A$ 是实数.

证 2° 当$A\in C^{n\times n}$时，$A^\sigma=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & \overline{A}\end{pmatrix}$，

故
$$\mathrm{qdet}A=\begin{vmatrix}A & 0\\ 0 & \overline{A}\end{vmatrix}=\det A\det\overline{A}=|\det A|^2\geqslant 0.$$ □

我们自然会问，四元数矩阵的重行列式与拟行列式之间有什么关系？我们将证明，四元数方阵的重行列式与拟行列式是一致的. 为此，我们先给出关于四元数矩阵的 Jordan 标准形的一个定理，而其证明可参见文献[25].

定理 3.5.4 设 $A\in Q^{n\times n}$，则 A 相似于一个 Jordan 形矩阵 J，即存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} J_{n_1}(\omega_1) & & & \\ & J_{n_2}(\omega_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\omega_k)\end{pmatrix}=J,\ \sum_{s=1}^{k} n_s=n \tag{3.5.8}$$

其中

$$J_{n_s}(\omega_s)=\begin{pmatrix} \omega_s & 1 & & \\ & \omega_s & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \omega_s & 1\end{pmatrix}\in Q^{n_s\times n_s},1\leqslant s\leqslant k \tag{3.5.9}$$

其中，$\omega_s=a_s+b_s\mathrm{i}\in C, b_s\geqslant 0, 1\leqslant s\leqslant k$. 且除了对角 Jordan 块的排列次序外，$J$ 是由 A 唯一确定的. 我们称式(3.5.8)中的 J 为 A 的 Jordan 标准形.

定理 3.5.5 设 $A\in Q^{n\times n}$，则 A 的重行列式等于 A 的拟行列式，即有

$$\| A \| = \mathrm{qdet}A \tag{3.5.10}$$

证 设 A 的 Jordan 标准形 $J=\mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1),\cdots,J_{n_k}(\lambda_k))$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 为复数，则由定理 3.5.4 知，存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使得 $P^{-1}AP=J$，由定理 3.3.3，有

$$\| J \| = \| P^{-1}AP \| = \| P^{-1} \| \ \| A \| \ \| P \| = \| A \|$$

再由定理 3.3.7，有

$$\| A \| = \prod_{i=1}^{k} \| J_{n_i}(\lambda_i) \|$$

而

$$\| J_{n_i}(\lambda_i) \| = |J_{n_i}^*(\lambda_i)J_{n_i}(\lambda_i)| = |\bar{J}_{n_i}(\lambda_i)|\,|J_{n_i}(\lambda_i)|$$

故

$$\| A \| = \prod_{i=1}^{k} \left|\bar{J}_{n_i}(\lambda_i)\right| \left|J_{n_i}(\lambda_i)\right|$$

另一方面,由复数矩阵的性质知

$$J^{\sigma}=(P^{-1}AP)^{\sigma}=(P^{\sigma})^{-1}A^{\sigma}P^{\sigma}$$

于是有

$$\begin{aligned}|A^{\sigma}|&=|J^{\sigma}|=|\mathrm{diag}(J,\bar{J})|=|\bar{J}||J|\\&=\prod_{i=1}^{k}\left|\bar{J}_{n_i}(\lambda_i)\right|\left|J_{n_i}(\lambda_i)\right|\end{aligned}$$

所以有

$$\| A \| = |A^{\sigma}| = \mathrm{qdet}A$$ □

推论 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 $\mathrm{qdet}A\geqslant 0$.

第四章　四元数矩阵的另几个数值特征

矩阵是由 $m \times n$ 个元素排成的一个整体，这个看来相当简单的对象，实际上可以千变万化，极其复杂，这也许就是矩阵魅力之所在．但是在许多实际情况起突出作用的常常是矩阵的某些数值特征，如矩阵的行列式、特征值、奇异值、秩、迹、范数等，这些数值特征构成了常规矩阵理论中的重要内容而被普遍地研究过，对四元数矩阵来说，当然也要重点研究这些数值特征．我们曾在第三章专门讨论了四元数矩阵的行列式问题，本章将继续讨论四元数矩阵的特征值、谱、奇异值、秩与迹等几个矩阵数值特征，而关于这些数值特征的不等式将放到第五章讨论．

§4.1　四元数矩阵的特征值与特征多项式

由于四元数乘法不满足交换律，这使得四元数矩阵的特征值与特征多项式的定义及性质比起常规矩阵来要复杂得多．

定义 4.1.1　设 $A \in Q^{n\times n}$，若存在 $\lambda \in Q$ 及 $0 \neq \alpha \in Q^{n\times 1}$，使得

$$A\alpha = \alpha\lambda\,(\text{或 } Ax = \lambda\alpha) \tag{4.1.1}$$

则称 λ 为 A 的**右**(或**左**)**特征值**，而称 α 为 A 的属于右(或左)特征值 λ 的**特征向量**．如果 λ 既是 A 的右特征值，又是 A 的左特征值，则称 λ 为 A 的**特征值**．

注　四元数矩阵 A 的右特征值不一定是左特征值，反之，左

特征值也不一定为右特征值.我们将在后面举例说明之.

定义 4.1.2 设 $A\in Q^{m\times n}$,则称 $\|\lambda I_n - A\|$ 为 A 的**重特征多项式**,记为 $F_A(\lambda)$,或简记为 $F(\lambda)$,即

$$F_A(\lambda)=\|\lambda I_n - A\| \tag{4.1.2}$$

定义 4.1.3 设 $A\in Q^{n\times n}$,则称 A 的导出阵 $A^{\sigma}\in C^{2n\times 2n}$ 的特征多项式 $|\lambda I_{2n}-A^{\sigma}|$ 为 A 的**拟特征多项式**,记为 $F_A^{\sigma}(\lambda)$,或简记为 $F^{\sigma}(\lambda)$,即

$$F_A^{\sigma}(\lambda)=|\lambda I_{2n}-A^{\sigma}| \tag{4.1.3}$$

定理 4.1.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,$\lambda\in Q$,则 λ 是 A 的左特征值$\Leftrightarrow$ $F_A(\lambda)=0$.

证 λ 是 A 的左特征值,即存在 Q 上的非零 n 维向量 x,使得 $Ax=\lambda x$,即$(\lambda I-A)x=0$,这等价于 $\lambda I-A$ 的列向量右线性相关,由定理 3.3.6 知,这又等价于 $\|\lambda I-A\|=0$,即

$$F_A(\lambda)=0$$

□

命题 4.1.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 $\lambda_0\in Q$ 是 A 的右特征值,α 是 A 的属于 λ_0 的特征向量,$\lambda\sim\lambda_0$(即 $\exists\, 0\neq b\in Q$,使 $\lambda=b^{-1}\lambda_0 b$)则 λ 也是 A 的右特征值,而 $\beta=\alpha b$ 是 A 的属于 λ 的特征向量.

证 由条件有

$$A\alpha=\alpha\lambda_0$$
$$\lambda=b^{-1}\lambda_0 b,\ 0\neq b\in Q$$
$$\beta=\alpha b$$

于是有

$$A\beta=A\alpha b=\alpha\lambda_0 b=\alpha b b^{-1}\lambda_0 b=\alpha b\lambda=\beta\lambda$$

故 λ 是的右特征值,$\beta=\alpha b$ 是 A 的属于 λ 的特征向量. □

定理 4.1.2(右特征值存在性) 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 必存在右特征值 $\lambda=a+hi\in C$,且 $\bar{\lambda}$ 也是 A 的右特征值,从而 A 必有非负虚部的右特征值.

证 由式(2.3.1),可设

$$A=A_1+A_2\mathrm{j}\quad(\text{其中 } A_1,A_2\in C^{n\times n})$$

由式(2.3.8),有

$$A^\sigma=\begin{pmatrix}A_1 & -A_2\\ \overline{A_2} & \overline{A_1}\end{pmatrix}\in C^{2n\times 2n}$$

由 C 上的矩阵理论可知,A^σ 必有在特征值 $\lambda\in C\subset Q$,于是有 C 上的 $2n$ 维非零列向量 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$,使

$$\begin{pmatrix}A_1 & -A_2\\ \overline{A_2} & \overline{A_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\lambda$$

其中 α_1,α_2 是 C 上的 n 维列向量,即

$$A_1\alpha_1-A_2\alpha_2=\alpha_1\lambda \qquad ①$$

$$\overline{A}_2\alpha_1+\overline{A}_2\alpha_2=\alpha_2\lambda \qquad ②$$

将式②两端取共轭(注意到它们都是 C 上的矩阵),得

$$A_2\overline{\alpha_1}+A_2\overline{\alpha_2}=\overline{\alpha_2}\overline{\lambda} \qquad ③$$

作 Q 上 n 维列向量

$$\alpha=\alpha_1+\bar{\alpha}_2\mathrm{j},\ \beta=-\bar{\alpha}_2+\alpha_1\mathrm{j} \qquad ④$$

由 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\neq 0$ 知,α_1,α_2 中至少有一个不为零,从而 α 与 β 均为 Q 上的非零的 n 维列向量,于是由式④,(1.3.6),①,③,有

$$\begin{aligned}A\alpha&=(A_1+A_2\mathrm{j})(\alpha_1+\bar{\alpha}_2\mathrm{j})\\&=(A_1\alpha_1-A_2\alpha_2)+(A_1\bar{\alpha}_2+A_2\bar{\alpha}_1)\mathrm{j}\\&=\alpha_1\lambda+\bar{\alpha}_2\bar{\lambda}\mathrm{j}=\alpha_1\lambda+\bar{\alpha}_2\mathrm{j}\lambda\\&=(\alpha_1+\bar{\alpha}_2\mathrm{j})\lambda=\alpha\lambda\end{aligned}$$

故 λ 是 A 的右特征值.

又因为

$$A\beta=(A_1+A_2\mathrm{j})(-\bar{\alpha}_2+\alpha_1\mathrm{j})$$

$$
\begin{aligned}
&= (-A_1\bar{\alpha}_2 - A_2\bar{\alpha}_1) + (A_1\alpha_1 - A_2\alpha_2)\mathrm{j} \\
&= -\bar{\alpha}_2\bar{\lambda} + \alpha_1\lambda\mathrm{j} \\
&= -\bar{\alpha}_2\bar{\lambda} + \alpha_1\mathrm{j}\bar{\lambda} \\
&= (-\bar{\alpha}_2 + \alpha_1\mathrm{j})\bar{\lambda} \\
&= \beta\bar{\lambda}
\end{aligned}
$$

所以 λ 与 $\bar{\lambda}$ 均为 A 的右特征值. 而 λ 与 $\bar{\lambda}$ 必有一具有非负虚部.

□

例 Q 上的二阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{j} & \mathrm{k} \end{pmatrix}$$

由于

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{j} & \mathrm{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} j$$

令

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

作 C 上的 4 阶矩阵, 即 A 的导出阵

$$A^{\sigma} = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ \overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A 的拟特征多项式

$$F_A^{\sigma}(x) = |xI_4 - A^{\sigma}| = \begin{vmatrix} x-1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & x-1 & \mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 4$$

令 $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\lambda_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，

则 $\lambda_1,\bar{\lambda}_1,\lambda_2$ 及 $\bar{\lambda}_2$ 都是 A^σ 在 C 上的右特征值.对 λ_1，容易求得齐次线性方程组

$$(\lambda_1 I_4-A^\sigma)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

的一个非零解

$$x_1=\lambda_1(\lambda_1-1),\quad x_2=-\mathrm{i}\lambda_1(\lambda_1-1)^2$$

$$x_3=\mathrm{i}(\lambda_1-2),\quad x_4=-(\lambda_1-)(\lambda_1-2)$$

令

$$\begin{aligned}\alpha&=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{x}_3\\\bar{x}_4\end{pmatrix}\mathrm{j}=\begin{pmatrix}x_1+\bar{x}_3\mathrm{j}\\x_2+\bar{x}_4\mathrm{j}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda_1(\lambda_1-1)-(\bar{\lambda}_1-2)\mathrm{k}\\-\mathrm{i}\lambda_1(\lambda_1-1)^2-(\bar{\lambda}_1-1)(\bar{\lambda}_1-2)\mathrm{j}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}\mathrm{k}\\\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-5+3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}+\frac{5-3\sqrt{3}}{2}\mathrm{k}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

则有 $A\alpha_1=\alpha_1\lambda_1$，即 λ_1 是 A 的右特征值.

同样令 $\beta_1=\begin{pmatrix}-\bar{x}_3\\-\bar{x}_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\x_1\end{pmatrix}\mathrm{j}$，有 $A\beta_1=\beta_1\bar{\lambda}_1$，即 $\bar{\lambda}_1$ 也是 A 的右特征值. □

注 定理 4.1.2 表明，Q 上任何方阵在 $C\subset Q$ 中总有右特征值，而且它的非实右特征值在 C 中是成对出现的.

定理 4.1.3 设 $A\in Q^{n\times n}$，则必存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使 $P^{-1}AP$ 是上三角阵，即

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{4.1.4}$$

其中 $\lambda_s=a_s+h_s\mathrm{i}(h_s\geqslant 0)\in C, s=1,\cdots,n$.

证 对阶数 n 归纳. 当 $n=1$ 时,由命题 1.3.7 知定理成立. 假定对于 Q 上 $n-1$ 阶矩阵定理成立. 对 Q 上 n 阶矩阵 A,由定理 4.1.2,存在 $\lambda_1\in C$ 以及 Q 上 n 维非零列向量 α_1,使

$$A\alpha_1=\alpha_1\lambda_1$$

把 α_1 扩充为 Q 上 n 维右列向量空间的一个基

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$$

以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为列得到 Q 上一个 n 阶矩阵 P_1,则 P_1 是可逆阵,且

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \bar{\beta} \\ 0 & A_1\end{pmatrix}$$

其中 β 是 Q 上 $n-1$ 维列向量, A_1 是 Q 上 $n-1$ 阶的矩阵,由归纳假设,存在 Q 上 $n-1$ 阶可逆阵 T,使

$$T^{-1}A_1T=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \lambda_3 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_s=a_s+h_s\mathrm{i}\in C, h_s\geqslant 0, s=2,3,\cdots,n$.

令 $P=P_1\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & T\end{pmatrix}$,则 $P\in Q^{n\times n}$ 且 P 可逆,并且 $P^{-1}AP$ 具有式(4.1.4)的形式. 于是定理得证. □

对 $\forall q\in Q$,由式(1.1.10)知, q 的矩 $N(q)=\bar{q}q$, q 的迹 $T(q)=q+\bar{q}$;对 n 维列向量 $\alpha=(q_1,q_2,\cdots,q_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$,我们定义 $N(\alpha)\xlongequal{\triangle}\sum\limits_{i=1}^{n}N(q_i)=\alpha^*\alpha$.

命题 4.1.2 设 $\alpha,\beta\in Q^{n\times 1}$, $\alpha\neq\beta$, 若 $N(\alpha)=N(\beta)$, 且 $\alpha^*\beta\in R$, 则存在广义酉阵 $U=I_n-2uu^*$, 使 $U\alpha=\beta$, 其中 $u\in Q^{n\times 1}$是单位列向量(即 $N(u)=1$).

证 作 Q 上的 n 维列向量

$$u=(\alpha-\beta)(\sqrt{N(\alpha-\beta)})^{-1} \qquad ①$$

易知 $N(u)=1$. 将上式改写为

$$\beta-\alpha=-u\sqrt{N(\alpha-\beta)} \qquad ②$$

由假设 $\alpha^*\beta\in R$, 则有

$$\overline{\alpha^*\beta}=\alpha^*\beta$$

又$\overline{\alpha^*\beta}=(\alpha^*\beta)^*$, 再由(2.1.10)式, 有

$$(\alpha^*\beta)^*=\beta^*\alpha$$

故

$$\alpha^*\beta=\beta^*\alpha$$

于是

$$\begin{aligned}N(\alpha-\beta)&=(\alpha-\beta)^*(\alpha-\beta)=(\alpha^*-\beta^*)(\alpha-\beta)\\&=\alpha^*\alpha+\beta^*\beta-\beta^*\alpha-\alpha^*\beta=\overline{2(\alpha^{\mathrm{T}}-\beta^{\mathrm{T}})}\alpha\end{aligned}$$

故由上式及式②即得

$$\sqrt{N(\alpha-\beta)}=2u^*\alpha$$

再由上式及式①, ②, 即有

$$\beta-\alpha=-2uu^*\alpha$$

即

$$\beta=\alpha-2uu^*\alpha=(I_n-2uu^*)\alpha=U\alpha \qquad \square$$

命题 4.1.3 设可逆阵 $A\in Q^{n\times n}$, 则必存在 $U\in U^{n\times n}$及可逆的上三角阵 $V\in Q^{n\times n}$, 且

$$V=\begin{pmatrix}v_1 & & * \\ & v_2 & \\ & & \ddots \\ & & & v_n\end{pmatrix}$$

使 $A=UV$.

证 对 A 的阶数n 用归纳法. $n=1$, 命题显然成立. 假设对 n

-1,命题成立,则对 n 阶可逆阵 A,将 A 按它的列分块:

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

其中 $$a_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})^{\mathrm{T}},i=1,\cdots,n$$

i)若 $a_{11}\neq 0$,而 $a_{21},a_{31},\cdots,a_{n1}$中至少有一个非零元,则作 n 维列向量

$$\beta_1=(b_{11},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

其中 $$b_{11}=a_{11}N(a_{11})^{-1}N(\alpha_1)$$

于是 $\alpha_1\neq\beta$,$N(\alpha_1)=N(\beta_1)$,且 $\alpha_1{}^*\beta_1=N(\alpha_1)\in R$,故由命题 4.1.2,存在 $W_1\in U^{n\times n}$,使 $W_1\alpha_1=\beta_1$,于是

$$W_1A=\begin{pmatrix} b_{11} & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \qquad ①$$

ii)若 $a_{11}=0$,则由 A 可逆,知 $a_{21},\cdots,a_{n1}$中至少有一个非零元,这时令

$$\beta_1=(\sqrt{N(\alpha_1)},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

则仍有 $\alpha_1\neq\beta_1$,$N(\alpha_1)=N(\beta_1)$,且 $\alpha^*\beta=0\in R$,于是由命题 4.1.2 又可得式①的形状.

由归纳法假设,必存在 $U_1\in U^{(n-1)\times(n-1)}$及 $n-1$ 阶上三角阵 V_1,使

$$A_1=U_1V_1$$

令 $$U=W_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix},V=\begin{pmatrix} b_{11} & * \\ 0 & V_1 \end{pmatrix}$$

便得

$$A=UV$$ □

命题 4.1.4 设可逆阵 $A\in Q^{n\times n}$,则必存在 $U\in U^{n\times n}$及可逆的上三角阵 $V\in Q^{n\times n}$,且

$$V=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},\lambda_t>0,t=1,\cdots,n$$

使 $$A = UV$$

证 由命题 4.1.3 知，存在 $U_1 \in U^{n\times n}$ 及上三角阵 $V_1 \in Q^{n\times n}$，且

$$V_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \mu_2 \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$

使 $$A = U_1 V_1$$

因 A 可逆，则 V_1 亦可逆，故 $\mu_s \neq 0$，从而 $|\mu_s| > 0$，$s = 1, \cdots, n$，将 V_1 改写成

$$V_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 |\mu_1|^{-1} & & \\ & \mu_2 |\mu_2|^{-1} \ddots & \\ & & \mu_n |\mu_n|^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} |\mu_1| & & * \\ & |\mu_2| \ddots & \\ & & |\mu_n| \end{pmatrix}$$

易证 $$\mathrm{diag}(\mu_1 |\mu_1|^{-1}, \cdots, \mu_n |\mu_n|^{-1}) = U_2 \in U^{n\times n}$$

令 $$U = U_1 U_2, \text{则 } U \in U^{n\times n},$$

次令 $$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & \ddots \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_s = |\mu_s| > 0, s = 1, \cdots, n$$

则上述 U, V 使

$$A = UV$$ □

定理 4.1.4(Schur 定理的推广) 设 $A \in Q^{n\times n}$，则必存在 $U \in U^{n\times n}$，使

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & q_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{4.1.5}$$

其中 $\lambda_s=\lambda_s^{(1)}+\lambda_s^{(2)}\mathrm{i}\in C,\lambda_s^{(2)}\geqslant 0,s=1,\cdots,n$. 式(4.1.5)也称为四元数矩阵的**舒尔**(Schur)**三角分解**.

证 由定理 4.1.3 知,存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\mu_1 & & * \\ & \mu_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix} \quad ①$$

其中 $\mu_s=\mu_s{}^{(1)}+\mu_s{}^{(2)}\mathrm{i}\in C,\mu_s{}^{(2)}\geqslant 0,s=1,\cdots,n$. 对可逆阵 P,由命题 4.1.4,必存在 $U\in U^{n\times n}$与上三角阵

$$V=\begin{pmatrix}v_1 & & * \\ & v_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & v_n\end{pmatrix},\text{其中 } v_s>0,s=1,\cdots n \quad ②$$

使
$$P=UV$$

于是由式①,②,有

$$(UV)^{-1}AUV=\begin{pmatrix}\mu_1 & & * \\ & \mu_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}$$

即
$$U^*AU=V\begin{pmatrix}\mu_1 & & * \\ & \mu_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}V^{-1} \quad ③$$

易证式③右边的 V^{-1}也是上三角阵,上三角阵的乘积仍是上三角阵,且其乘积的对角线上的元素均为形如 $\lambda_s=\lambda_s^{(1)}+\lambda_s^{(2)}\mathrm{i},\lambda_s^{(2)}\geqslant 0$ $(s=1,\cdots,n)$的复数. □

由定理 4.1.4 可得如下:

推论 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 酉相似于实对角阵$\Leftrightarrow A\in SC_n(Q)$.

证 "$\Leftarrow$" 由定理 4.1.4 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使式(4.1.5)成立,即

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & q_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

上式两端取转置共轭并注意到 $A^*=A$,则有

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & & & \\ \bar{q}_{12} & \bar{\lambda}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{q}_{1n} & \cdots & & \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}$$

比较上面两式,即得 $q_{st}=0,(s\neq t).\lambda_s\in R$,即

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_s\in R,s=1,\cdots,n \quad ①$$

"⇒" 设有 $U\in U^{n\times n}$,使式①成立,则

$$A=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}U^*,\lambda_s\in R,s=1,\cdots,n$$

于是
$$A^*=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}U^*=A$$

故 $A\in SC_n(Q)$. □

定义 4.1.4 设 $A\in Q^{n\times n}$,$\lambda_s\in Q,s=1,\cdots,n$,如果有可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \quad (4.1.6)$$

则称 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的一组**谱值**. 而由定理 4.1.4 中所得的谱值 $\omega_s=\lambda_s^{(1)}+\lambda_s^{(2)}\mathrm{i}\in C,\lambda_s^{(2)}\geqslant 0,s=1,\cdots,n$ 称为 A 的**谱值主值**.

定理 4.1.5 Q 上的两个相似的 n 阶矩阵有相同的谱值. 即相似变换不改变四元数矩阵的谱值.

证 设 $A, B \in Q^{n\times n}$，$A \sim B$，则存在可逆阵 $P_1 \in Q^{n\times n}$，使 $P_1^{-1}AP_1 = B$，又若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的谱值，则存在可逆阵 $P \in Q^{n\times n}$，使式(4.1.6)成立. 于是可逆阵 $P_2 = P_1^{-1}P \in Q^{n\times n}$，使

$$P_2^{-1}BP_2 = P^{-1}(P_1BP_1^{-1})P = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

故 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 B 的谱值.

同理可证，B 的谱值也是 A 的谱值，故命题成立. □

定理 4.1.6 设 $A \in Q^{n\times n}$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的一组谱值. 若 $\mu_s \sim \lambda_s$，$s = 1, \cdots, n$，则 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 也是 A 的一组谱值.

证 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的一组谱值，则存在可逆阵 $P_1 \in Q^{n\times n}$，使

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

由 $\mu_s \sim \lambda_s$，$s = 1, \cdots, n$，则存在 $0 \neq q_s \in Q$，$s = 1, \cdots, n$，使

$$\mu_s = q_s^{-1}\lambda_s q_s, \quad s = 1, \cdots, n$$

作 $P_2 = \mathrm{diag}(q_1, \cdots, q_n)$，则 P_2 可逆，若令 $P = P_1P_2$，则

$$P^{-1}AP = P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = \begin{pmatrix} q_1^{-1}\lambda_1 q & & * \\ & \ddots & \\ & & q_n^{-1}\lambda_n q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$

故 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 也是 A 的一组谱值. □

注 定理 4.1.6 表明，虽然 A 的谱值有无限多组，但谱值主值是唯一的. 又由于相似同类四元数的矩 $N(q)$ 相等，故四元数矩阵 A 的谱值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的矩的和 $\sum_{s=1}^{n} N(\lambda_s)$ 是个**定数**.

定理 4.1.7 设 $A,B\in Q^{n\times n}$,若 A 与 B 相似,则 A 与 B 有相同的拟特征多项式.

证 因 $A,B\in Q^{n\times n}$ 相似,则存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$ 使

$$P^{-1}AP=B$$

由命题 2.2.3,有

$$(P^{\sigma})^{-1}A^{\sigma}P^{\sigma}=B^{\sigma}$$

由复数域 C 上的矩阵理论知,A^{σ} 与 B^{σ} 相似,从而有相同的特征多项式,即 A 与 B 有相同的拟特征多项式. □

命题 4.1.5 设 $B\in Q^{n\times n}$,若 B 为上三角阵,即

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 q_{12}\cdots q_{1n} \\ \lambda_2\cdots q_{2n} \\ \ddots \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_s\in C(s=1,\cdots,n)$,则 B 的拟特征多项式 $F_{A^{\sigma}}(\lambda)$ 是 R 上的形如(4.1.7)的多项式,且 $\lambda_1,\bar{\lambda}_1,\cdots,\lambda_n,\bar{\lambda}_n$ 是 B 的拟特征多项式的 $2n$ 个根.

证 设 $B=B_1+B_2\mathrm{j}$,其中 $B_1,B_2\in C^{n\times n}$,则

$$B_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{12}\cdots a_{1n} \\ \lambda_2\cdots a_{2n} \\ \ddots \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是 B^{σ} 的特征多项式为

$$\begin{aligned} f(\lambda)=|\lambda I_{2n}-B^{\sigma}|&=\begin{vmatrix} \lambda I_n-B_1 & B_2 \\ -\bar{B}_2 & \lambda I_n-\bar{B}_1 \end{vmatrix} \\ &=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\bar{\lambda}_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\bar{\lambda}_2)\cdots \\ &\quad(\lambda-\lambda_n)(\lambda-\bar{\lambda}_n) \\ &=(\lambda^2+|\lambda_1|^2)(\lambda^2+|\lambda_2|^2)\cdots(\lambda^2+|\lambda_n|^2) \qquad (4.1.7) \end{aligned}$$

故 B 的拟特征多项式 $F_B{}^\sigma(\lambda)$为 $2n$ 次实系数式项式，且 $\lambda_1,\bar{\lambda}_1,\cdots,\lambda_n,\bar{\lambda}_n$ 是$F_B{}^\sigma(\lambda)$的 $2n$ 个根(n 对共轭复根). □

定理 4.1.8 设 $A\in Q^{n\times n}$，则 A 的拟特征多项式 $F_A{}^\sigma(\lambda)$是 R 上的形如式(4.1.7)的多项式，从而有共轭的 n 对复根.

证 由定理 4.1.4 知，存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*AU=B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_t\in C,t=1,\cdots,n$$

又由命题 4.1.5 知，B 的拟特征多项式是R 上的形如式(4.1.7)的多项式，再由定理 4.1.7 知，A 与 B 的拟特征多项式相同，因此 A 的拟特征多项式也是R 上的形如式(4.1.7)的多项式，从而有共轭的 n 对复根. □

定理 4.1.9 设 $A\in Q^{n\times n}$，则 $F_A{}^\sigma(A)=0$.

证 我们把 $F_A{}^\sigma(A)=|\lambda I_{2n}-A^\sigma|$简记为 $f(\lambda)$，则由复数域 C 上的 Hamilton-Cayley 定理知

$$f(A^\sigma)=0$$

由定理 4.1.5 知，$f(\lambda)$是 R 上的多项式，于是由命题 1.3.2 之 4°与上式知

$$(f(A))^\sigma=f(A^\sigma)=0$$

由上式及命题 2.3.2 之 1°知

$$f(A)=0$$

即

$$F_A{}^\sigma(A)=0$$ □

定理 4.1.10 设 $\lambda\in Q$，则 λ 是$A\in Q^{n\times n}$的右特征值$\Leftrightarrow$

$$F_A{}^\sigma(\lambda)=0$$

证 “$\Leftarrow$” 设 $\lambda\in Q$ 使

$$F_A{}^\sigma(\lambda)=0$$

由命题 1.3.7 知，必存在 $0\neq b\in Q$，使

$$b\lambda b^{-1}=\lambda_0\in C$$

又由 $F_A^{\sigma}(\lambda)$的系数为实数,及命题1.3.5,有

$$F_A^{\sigma}(\lambda_0)=F_A^{\sigma}(b\lambda b^{-1})=bF_A^{\sigma}(\lambda)b^{-1}=0$$

即 λ_0 是 A^{σ} 的一个特征值,由复数域上的矩阵理论知,存在 C 上的 $2n$ 维非零列向量$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$(其中 α_1,α_2 为 C 上的 n 维列向量,且 α_1 与 α_2 至少有一个不为零),使

$$A^{\sigma}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\lambda_0 \qquad ①$$

设

$$A=A_1+A_2\mathrm{j}$$

$$A^{\sigma}=\begin{pmatrix}A_1 & -A_2\\ \overline{A_2} & \overline{A_1}\end{pmatrix}$$

于是由式①,有

$$A_1\alpha_1-A_2\bar{\alpha}_2=\alpha_1\lambda_0 \qquad ②$$

$$\bar{A}_2\alpha_1+\bar{A}_1\bar{\alpha}_2=\bar{\alpha}_2\lambda_0 \qquad ③$$

将式③两端取共轭,得

$$A_2\bar{\alpha}_1+A_1\alpha_2=\alpha_2\bar{\lambda}_0 \qquad ④$$

令 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\mathrm{j}$,则 α 为Q 上的 n 维非零列向量,由式②,④,得

$$\begin{aligned}A\alpha &=(A_1+A_2\mathrm{j})(\alpha_1+\alpha_2\mathrm{j})\\ &=A_1\alpha_1+A_2\mathrm{j}\alpha_2\mathrm{j}+A_1\alpha_2\mathrm{j}+A_2\mathrm{j}\alpha_1\\ &=A_1\alpha_1+A_2\bar{\alpha}_2\mathrm{jj}+A_1\alpha_2\mathrm{j}+A_2\bar{\alpha}_1\mathrm{j}\\ &=A_1\alpha_1-A_2\bar{\alpha}_2+(A_1\alpha_2+A_2\bar{\alpha}_1)\mathrm{j}\\ &=\alpha_1\lambda_0+\alpha_2\bar{\lambda}_0\mathrm{j}=\alpha_1\lambda_0+\alpha_2\mathrm{j}\lambda_0\\ &=(\alpha_1+\alpha_2\mathrm{j})\lambda_0=\alpha\lambda_0\end{aligned} \qquad (4.1.8)$$

故 λ_0 是 A 的右特征值.再令 $\beta=\alpha b$,因 $\lambda=b^{-1}\lambda_0 b$,故

$$A\beta=A\alpha b=\alpha\lambda b=(\alpha b)(b^{-1}\lambda_0 b)=\beta\lambda$$

因此 λ 是A 的右特征值.

"⇒" 设 $\lambda\in Q$ 为A 的右特征值,则存在 Q 上的 n 维非零列

向量α,使 $A\alpha=\alpha\lambda$. 由定理 4.1.7 及定理 4.1.8 知,A 的拟特征多项式$F_A{}^\sigma(\lambda)$为实系数多项式,且 $F_A{}^\sigma(A)=0$,于是由命题 2.3.2 之 4°知

$$\alpha F_A{}^\sigma(\lambda)=F_A{}^\sigma(A)\alpha=0$$

因为 $\alpha\neq0$,故得 $F_A^\sigma(\lambda)=0$. □

由定理 4.1.7 及定理 4.1.10 可得:

定理 4.1.11 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 有且仅有 n 个右特征主值 $\lambda_1(A^\sigma),\cdots,\lambda_n(A^\sigma)$.

定理 4.1.12 设 $A\in Q^{n\times n}$,$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in Q$ 为 A 的一组谱值,即存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\tag{4.1.9}$$

记 $\omega(\lambda_s)$为 λ_s 的主值,$s=1,\cdots,n$,则 $\omega(\lambda_1),\cdots,\omega(\lambda_n)$为 A 的右特征主值.

证 因为对于每一个 $\lambda_s(s=1,\cdots,n)$必存在 Q 的非零元b_s,使得 $b_s{}^{-1}\lambda_s b_s=\omega(\lambda_s)\in C$,取 $F=P\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,$P$ 为式(4.1.9)中的可逆阵 P,则 $F\in Q^{n\times n}$,F 可逆,由式(4.1.9),有

$$F^{-1}AF=B=\begin{pmatrix}\omega(\lambda_1) & & \\ & \omega(\lambda_2) & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \omega(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

由命题 4.1.5 及定理 4.1.10 知,$\omega(\lambda_1),\cdots,\omega(\lambda_n)$是 A 的右特征主值. □

定理 4.1.13 设 $A\in SC_n(Q)$,则

1° A 的右特征值为实数;

2° A 的右特征值一定是A 的左特征值.

证 1° 设λ 为A 的右特征值,则存在 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in$

$Q^{n\times 1}$,使得

$$Ax = x\lambda \qquad ①$$

于是有 $$x^* Ax = x^* x\lambda = |x|^2\lambda = \lambda|x|^2 \qquad ②$$

且有 $$(x^* Ax)^* = (x^* x\lambda)^*,\ x^* A^* x = \bar{\lambda}x^* x.$$

注意到 $A^* = A$,故由上式有

$$x^* Ax = \bar{\lambda}x^* x = \bar{\lambda}|x|^2 \qquad ③$$

由式②,③及$|x|\neq 0$,即知有$\bar{\lambda} = \lambda$,从而$\lambda\in R$.

证 2° 设λ是A的右特征值,由1°知λ必为实数,

于是由 $$Ax = x\lambda$$

有 $$Ax = \lambda x$$

故λ亦是A的左特征值. □

推论 自共轭阵A的右特征值就是A的特征值,且自共轭阵A的特征值均为实数.

由上述推论及定理4.1.4的推论即得如下

定理 4.1.14 设$A\in SC_n(Q)$,则存在$U\in U^{n\times n}$,使

$$U^* AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (4.1.10)$$

其中$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$是$A$的全部$n$个特征值,且当$A>0$时有$\lambda_s>0(s=1,\cdots,n)$,当$A\geqslant 0$时有$\lambda_s\geqslant 0(s=1,\cdots,n)$.

注 定理4.1.14称为自共轭阵的**谱分解定理**.

推论 1 设$A\in SC_n(Q)$,则

1° $A>0\Leftrightarrow A$的特征值$\lambda_s(A)>0,s=1,\cdots,n$;

2° $A\geqslant 0\Leftrightarrow A$的特征值$\lambda_s(A)\geqslant 0,s=1,\cdots,n$.

推论 2 设$A\in SC_n(Q)$,$U\in U^{n\times n}$,则

$$\lambda_s(U^* AU) = \lambda_s(A),\ s=1,\cdots,n \qquad (4.1.11)$$

即酉相似变换不改变自共轭阵的特征值.

定理 4.1.15 设 $A \in Q^{n \times n}$,若 A 相似于一个实对角阵,则该对角阵的主对角线上的元素恰为 A 的全部特征值.

证 由题设有可逆阵 $P \in Q^{n \times n}$,使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_t \in R, t = 1, \cdots, n$$

记 $P = (p_1, \cdots, p_n)$,则 $0 \neq p_t \in Q^{n \times 1}, t = 1, \cdots, n$,且

$$(Ap_1, \cdots, Ap_n) = (p_1\lambda_1, \cdots, p_n\lambda_n)$$

得

$$Ap_t = p_t\lambda_t, t = 1, \cdots, n$$

由于 λ_t 为实数,故有

$$Ap_t = \lambda_t p_t, t = 1, \cdots, n$$

因此 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的右特征值也是 A 的左特征值,从而是 A 的特征值. □

定义 4.1.5 设 $A \in Q^{n \times n}$,若 A 能相似于一实对角阵,则称 A 为**中心封闭阵**;若 A 能相似于一实矩阵,则称 A 为**可中心化阵**.

显然,中心封闭阵必是可中心化阵;自共轭阵必是中心封闭阵.由定理 4.1.14 可得如下

定理 4.1.16 设 $A \in Q^{n \times n}$,若 A 为中心封闭阵,则 A 的特征值全为实数,且存在可逆阵 $P \in Q^{n \times n}$,使

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A)) \qquad (4.1.12)$$

其中 $\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A)$ 为 A 的特征值.

定理 4.1.17 与中心封闭阵相似的矩阵必为中心封闭阵,且两者具有相同的特征值.换句话说,相似变换不改变中心封闭阵的特征值,当然也不改变自共轭阵的特征值.

证 设 $A \in Q^{n \times n}$ 为中心封闭阵,则存在可逆阵 $P_1 \in Q^{n \times n}$,使

$$A = P_1 \operatorname{diag}(\lambda_1(A), \cdots \lambda_n(A)) P_1^{-1}, \lambda_s(A) \in R, 1 \leqslant s \leqslant n.$$

设 $B \sim A$,即存在可逆阵 $Q \in Q^{n\times n}$,使

$$B = QAQ^{-1}$$

于是 $$B = QP_1 \mathrm{dizg}(\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A)) P_1^{-1} Q^{-1}$$

令 $P = QP_1$,则 P 可逆,且使

$$B = P\mathrm{diag}(\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A)) P^{-1}$$

故 B 也是中心封闭阵,且

$$\lambda_s(B) = \lambda_s(A), s = 1, \cdots, n$$ □

由定理 4.1.10 知,当 $A \in Q^{n\times n}$时,A 的右特值与 A 的拟特征多项式 $F_A^\sigma(\lambda)$的根是一致的,而由命题 4.1.5 知 $F_A^\sigma(\lambda)$是 R 上的形如式(4.1.7)的多项式,它的复根是共轭成对出现的,即 $\lambda_s = \lambda_s^{(1)} \pm \lambda_s^{(2)}\mathrm{i}, \lambda_s^{(2)} \geqslant 0 (s = 1, \cdots, n)$,记 $\omega(\lambda_s) = \lambda_s^{(1)} + \lambda_s^{(2)}\mathrm{i}$, $\lambda_s^{(2)} \geqslant 0 (s = 1, \cdots, n)$为 A 的右特征主值,则 A 的右特征主值(按重数计)一共有 n 个.而由定理 4.1.12 知,由式(4.1.9)所确定的 A 的 n 个谱值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的主值 $\omega(\lambda_1), \cdots, \omega(\lambda_n)$亦皆为 A 的 n 个右特征值,可见 A 的右特征主值、A 的拟特征多项式 $F_A^\sigma(\lambda)$的根的主值、A 的谱值主值三者是一致的.

记 $A \in Q^{n\times n}$的右特征值的全体为 T_A,即

$$T_A = \{ b\lambda_n b^{-1} \mid \forall \neq b \in R, \lambda_i \text{ 是} A \text{ 的右特征主值}, i = 1, \cdots, n \}$$

定理 4.1.18 $A \in Q^{n\times n}$,则 T_A 为无限集$\Leftrightarrow A$ 的右特征主值至少有一个不是实数.

证 显然当 $\lambda_i \in R, i = 1, \cdots, n$ 时,$T_A = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$为一有限集.当 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 中至少有一个不属于 R 时,T_A 为无限集.事实上,设 $\lambda_t \overline{\in} R$,对于任何的正整数 m,令 $b_m = 1 + m\mathrm{j}$,有

$$\begin{aligned} b_m^{-1} \lambda_t b_m &= \frac{1}{1+m^2}(1 - m\mathrm{j})\lambda_t(1 + m\mathrm{j}) \\ &= \frac{1}{1+m^2}(\lambda_t + m^2\bar{\lambda}_t) + \frac{1}{1+m^2}(\lambda_t - \bar{\lambda}_t)\mathrm{j} \end{aligned}$$

故对于任意两个不同的正整数 m_1 与 m_2,都有

$$b_{m_1}{}^{-1}\lambda_t b_{m1} \neq b_{m_2}{}^{-1}\lambda_t b_{m2}$$

所以 $b_1{}^{-1}\lambda_t b_1, b_2{}^{-1}\lambda_t b_2$,都是 T_A 中不同的元,从而 T_A 为无限集. □

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -k\\ k & 1\end{pmatrix}\in Q^{n\times n}$,则 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}j$,从而

$$F_A{}^{\sigma}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & i\\ 0 & \lambda-1 & -i & 0\\ 0 & -i & \lambda-1 & 0\\ i & 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=[(1-\lambda)^2-1]^2 \tag{4.1.12'}$$

而

$$\begin{aligned}F_A(\lambda)&=\|\lambda I-A\|=|(\lambda I-A)^*(\lambda I-A)|\\ &=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1 & k\\ -k & \lambda-1\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}\lambda-1 & k\\ -k & \lambda-1\end{pmatrix}\right|\\ &=\left|\begin{pmatrix}\bar\lambda-1 & k\\ -k & \bar\lambda-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda-1 & k\\ -k & \lambda-1\end{pmatrix}\right|\\ &=\begin{vmatrix}(\bar\lambda-1)(\lambda-1)+1 & (\bar\lambda-1)k+k(\lambda-1)\\ -k(\lambda-1)-(\bar\lambda-1)k & 1+(\bar\lambda-1)(\lambda-1)+1\end{vmatrix}\\ &=[(\bar\lambda-1)(\lambda-1)+1]^2+[(\bar\lambda-1)k+k(\lambda-1)]^2\\ &=(\bar\lambda\lambda-\lambda-\bar\lambda+2)^2+(\bar\lambda k+k\lambda-2k)^2 \qquad (4.1.13)\end{aligned}$$

由式(4.1.12)易证,$\lambda=0,2$ 是 $F_A{}^{\sigma}(\lambda)$之根,从而由定理 4.1.10 知也是 A 的全部右特征主值.但由定理 4.1.13 知 $\lambda=0,2$ 也应是 A 的左特征值.而事实上由式(4.1.13)知 $\lambda=0,2$ 确实是 $F_A(\lambda)$之根,这也应验了 $\lambda=0,2$ 也是 A 的左特征值.由式(4.1.13)可以验证 $\lambda=1+i$ 亦使 $F_A(x)=F_A(1+i)=0$,故由定

理4.1.1知 $1+\mathrm{i}$ 也是 A 的左特征值，其实由 $A\begin{pmatrix}-\mathrm{j}\\1\end{pmatrix}=(1+\mathrm{i})\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$ 也说明了 $1+\mathrm{i}$ 是 A 的左特征值. 但由式(4.1.12)知：$F_A^{\sigma}(1+\mathrm{i})\neq 0$，故 $1+\mathrm{i}$ 不是 A 的右特征值.

注 例1亦表明 $F_A(\lambda)\neq F_A^{\sigma}(\lambda)$.

例2 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{k}\\ \mathrm{k} & 1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 2\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$

于是
$$A\sim B=PAP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{k}\\ \mathrm{k} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1+3\mathrm{j} & -2\mathrm{k}\\ 5\mathrm{k} & 1+3\mathrm{j}\end{pmatrix}$$
$$\|A\|=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$
$$\|B\|=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

故有 $\|B\|=\|PAP^{-1}\|=\|A\|$.

再看

$$\begin{aligned}
&F_B(\lambda)\\
&=\|\lambda I-B\|\\
&=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1-3\mathrm{j} & 2\mathrm{k}\\ -5\mathrm{k} & \lambda-1-3\mathrm{j}\end{pmatrix}^{*}\begin{pmatrix}\lambda-1-3\mathrm{j} & 2\mathrm{k}\\ -5\mathrm{k} & \lambda-1-3\mathrm{j}\end{pmatrix}\right|\\
&=\left|\begin{pmatrix}\bar{\lambda}-1+3\mathrm{j} & 5\mathrm{k}\\ -2\mathrm{k} & \bar{\lambda}-1+3\mathrm{j}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda-1-3\mathrm{j} & 2\mathrm{k}\\ -5\mathrm{k} & \lambda-1-3\mathrm{j}\end{pmatrix}\right|\\
&=\begin{vmatrix}(\bar{\lambda}-1+3\mathrm{j})(\lambda-1+3\mathrm{j})+25 & 2(\bar{\lambda}-1+3\mathrm{j})\mathrm{k}+5\mathrm{k}(\lambda-1-3\mathrm{j})\\ -2\mathrm{k}(\lambda-1-3\mathrm{j})-5(\bar{\lambda}-1+3\mathrm{j})\mathrm{k} & 4+(\bar{\lambda}-1+3\mathrm{j})(\lambda-1-3\mathrm{j})\end{vmatrix}\\
&=[(\bar{\lambda}-1+3\mathrm{j})(\lambda-1-3\mathrm{j})+4][(\bar{\lambda}-1+3\mathrm{j})(\lambda-1-3\mathrm{j})+25]
\end{aligned}$$

$+[2k(\lambda-1-3j)+5(\bar{\lambda}-1+3j)k][2(\bar{\lambda}-1+3j)k+5k(\lambda-1-3j)]$ (4.1.14)

可以验证 $\lambda=0,2,1+i$ 均不能使式(4.1.14)为 0,即 $\lambda=0,2,1+i$ 均不是 $F_B(\lambda)$ 之根.

注 例 2 说明,虽然 $A\sim B$,但 $F_A(\lambda)\neq F_B(\lambda)$,故左特征值和重多项式均不是相似变换的不变量.然而,由定理 4.1.12 知,任意四元数矩阵 A 总存在(复)右特征值,又由定理 4.1.5 知,四元数矩阵的拟特征多项式是相似变换的不变量,从而由定理 4.1.8 知,四元数矩阵的右特征值亦是相似变换的不变量.

定理 4.1.4 之推论表明,当且仅当 A 为自共轭的四元数矩阵时,A 酉相似于实对角阵.那么,什么样的四元数矩阵可以对角化呢? 我们先证如下

命题 4.1.6 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 A 相似于对角阵,则 A 必相似于 C 上的对角阵.

证 因 A 相似于对角阵,即存在可逆阵 $P_1\in Q^{n\times n}$,使

$$P_1^{-1}AP_1=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$$

由命题 1.3.7,必存在 $b_t\in Q,b_t\neq 0,1\leqslant t\leqslant n$,使

$$b_ta_tb_t^{-1}\in C,1\leqslant t\leqslant n$$

令
$$P=P_1\mathrm{diag}(b_1^{-1},\cdots,b_n^{-1})$$

则 $P^{-1}AP$ 是 C 上的对角阵. □

定义 4.1.6 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 $AA^*=A^*A$,则称 A 为 Q 上的**正规阵**.

显然,自共轭阵必是正规阵,但反之不真.

定理 4.1.19 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 为正规阵的充要条件是 A 酉相似于对角阵,即存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^*AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \tag{4.1.15}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in C$,且为 A 的 n 个右特征值.

证 充分性是显然的.下证必要性,设 A 为正规阵,我们来证明式(4.1.13)成立.

首先由定理 4.1.4 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\ \lambda_t\in C,1\leqslant t\leqslant n. \qquad ①$$

于是

$$U^*AA^*U$$

$$=\begin{pmatrix}N(\lambda_1)+\sum_{j=2}^{n}N(q_{ij}) & & & *\\ & N(\lambda_2)+\sum_{j=3}^{n}N(q_{2j}) & & \\ & & \ddots & \\ & & N(\lambda_{n-1})+N(q_{n-1,n}) & \\ & & & N(\lambda_n)\end{pmatrix} \qquad ②$$

$$U^*A^*AU$$

$$=\begin{pmatrix}N(\lambda_1) & & & & *\\ & N(\lambda_2)+N(q_{12}) & & & \\ & & N(\lambda_3)+\sum_{i=1}^{n}N(q_{i3}) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & N(\lambda_n)+\sum_{i=1}^{n}N(q_{in})\end{pmatrix} \qquad ③$$

由 A 是正规阵的假设,比较两式②,③各主对角元,即得 $N(q_{ij})=0$,即 $q_{ij}=0,1\leqslant i<j\leqslant n$,故由式①即得式(4.1.15). □

§4.2 四元数矩阵的秩 奇异值 迹

一、四元数矩阵的秩

定义 4.2.1 设

$$A=(a_{ij})_{n\times m}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}\in Q^{n\times m},$$

其中 $\alpha_j=(a_{1j}\cdots,a_{nj})^{\mathrm{T}},j=1,\cdots,m;\beta_i=(a_{i1},\cdots,a_{im}),i=1,\cdots,n$，则称列向量组$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$的极大右(左)线性无关组的个数为 A 的**列右(左)秩**;称行向量组$\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$的极大左(右)线性无关的个数为 A 的**行左(右)秩**;在 A 的子方阵中,重行列式不为零的子方阵的最大阶数 r 称为矩阵A **的秩**,记作 $\mathrm{rank}A=r$;如果 $n=m=r$,则称 A 为**满秩矩阵**;如果 $r=0$,则称 A 为 0 **秩矩阵**,此时显然 A 的所有元素均为零;又满秩矩阵必为方阵.

显然以下命题成立:

命题 4.2.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 的行、列的初等变换不改变 A 的列右秩与行左秩.

定理 4.2.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 满秩$\Leftrightarrow A$ 可逆.

证 由定理 3.3.5 即得. □

定理 4.2.2 设 $A\in Q^{n\times n}$,则

$$A\text{ 的列右秩}=A\text{ 的列左秩}=\mathrm{rank}A \tag{4.2.1}$$

$$A\text{ 的行右秩}=A\text{ 的行左秩}=\mathrm{rank}A \tag{4.2.2}$$

证 设 A 的列右秩为 s, $\mathrm{rank}A=r$,则 A 有 r 阶子方阵 A_r, $\|A_r\|\neq 0$. 由定理 3.3.5,右齐次方程组 $A_rx=0$ 只有零解,故 A_r 所在的 r 个列向量不能右线性相关,故 $s\geqslant r$. 另一方面,不妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是A 的列向量的一个极大右线性无关组,记 $A_s=(\alpha_1,$

$\cdots,\alpha_s)$,则存在初等矩阵之积 P 与 T, $P\in Q^{n\times n}$, $T\in Q^{s\times s}$,使

$$PA_sT=\begin{pmatrix}C\\B\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}c_1&&&\\&c_2&&\\&&\ddots&\\&&&c_s\end{pmatrix},c_1c_2\cdots c_s\neq 0$$

由定理 3.3.4 之 1°知, A 的任意两行或两列的互换不改变矩阵重行列式的值,因此可设对角阵 C 的获得来自 A 的左上角,于是上式变成

$$P_{s\times s}\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1s}\\ \vdots\qquad\vdots\\ a_{s1}\cdots a_{ss}\end{pmatrix}T_{s\times s}=\begin{pmatrix}c_1&&&\\&c_2&&\\&&\ddots&\\&&&c_s\end{pmatrix}$$

再由式(3.3.10)得知 A 有 s 阶子式

$$\left\|\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1s}\\ \vdots\\ a_{s1}\cdots a_{ss}\end{pmatrix}\right\|=\left\|P_{s\times s}\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1s}\\ \vdots\qquad\vdots\\ a_{s1}\cdots a_{ss}\end{pmatrix}T_{s\times s}\right\|$$

$$=\left\|\begin{pmatrix}c_1&&&\\&c_2&&\\&&\ddots&\\&&&c_n\end{pmatrix}\right\|$$

$$=\bar{c}_1c_1\bar{c}_2c_2\cdots\bar{c}_sc_s>0$$

因此,又有 $r\geqslant s$,故 $r=s$.

其次,由于对齐次方程组取转置共轭后,有

$$\sum_i x_ia_{ij}=0\Leftrightarrow\sum_i\bar{a}_{ji}\bar{x}_i=0,j=1,2,\cdots,m$$

所以

A 的行左秩 $=A^*$ 列右秩 $=\mathrm{rank}A^*=\mathrm{rank}A=r$

故式(4.2.1)成立.将 A 换作 A^{T} 即得式(4.2.2). □

注 在四元数体 Q 上,一般地 $\mathrm{rank}A^*\neq\mathrm{rank}A$.

推论 设 $A\in Q^{m\times n}$,则 A 的初等变换不改变 A 的秩.

定理 4.2.3 设 $A \in Q^{m\times n}$, $\text{rank}A = r$,则存在可逆阵 $P \in Q^{m\times m}$, $T \in Q^{n\times n}$,使

$$PAT = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2.3}$$

我们略去这个定理的证明(可参阅文献[14]).

定理 4.2.4 设 $A \in Q^{n\times n}$,则

$$\text{rank}A = \frac{1}{2}\text{rank}A^{\sigma} \tag{4.2.4}$$

其中 A^{σ} 为 A 的导出阵.

证 设 $\text{rank}A = r$,则由定理 4.2.3 知,存在可逆阵,$P \in Q^{m\times m}$、$T \in Q^{n\times n}$,使

$$PAT = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由上式及式(2.3.15),(2.3.16),有

$$P^{\sigma}A^{\sigma}T^{\sigma} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\sigma} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

且 P^{σ}, T^{σ} 都是复数域 C 的可逆阵,所以 A^{σ} 的秩为 $2r$,故式(4.2.4)成立. □

推论 1 设 $A, B \in Q^{m\times n}$,则

$$\text{rank}A = \text{rank}B \Leftrightarrow \text{rank}A^{\sigma} = \text{rank}B^{\sigma}$$

设 A, B, C 为四元数体 Q 上的矩阵,则由复数域 C 上矩阵秩的结论[6]及定理 4.2.4 可得如下推论:

推论 2 $\text{rank}A + \text{rank}B - B$ 的行数

$$\leqslant \text{rank}(AB) \leqslant \min\{\text{rank}A, \text{rank}B\}. \tag{4.2.5}$$

推论 3 $\text{rank}(A + B) \leqslant \text{rank}A + \text{rank}B. \quad (4.2.6)$

$\text{rank}(A - B) \geqslant \min A - \text{rank}B. \quad (4.2.6)'$

推论 4 $\operatorname{rank}(ABC) \geqslant \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) - \operatorname{rank}B.$

$$(4.2.7)$$

推论 5 设 A、B 为相合矩阵，则 $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}B.$ (4.2.8)

推论 6 设 A 为对合矩阵，即 $A^2 = I_n$，则

$$\operatorname{rank}(A - I) + \operatorname{rank}(A + I) = n. \tag{4.2.9}$$

推论 7 设 $A \in Q^{n \times n}$，A 为等幂矩阵，即 $A^2 = A$，则

$$\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}(A - I) = n. \tag{4.2.10}$$

推论 8 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m \in Q^{n \times n}$，且 $A_1 A_2 \cdots A_m = 0$，则

$$\operatorname{rank}A_1 + \operatorname{rank}A_2 + \cdots + \operatorname{rank}A_m \leqslant (m-1)n. \tag{4.2.11}$$

推论 9 设 $A \in Q^{m \times n}$，则

$$\operatorname{rank}A^{\mathrm{T}} = \operatorname{rank}\bar{A} \tag{4.2.12}$$

$$\operatorname{rank}A^* = \operatorname{rank}\bar{A} \tag{4.2.13}$$

$$\operatorname{rank}A^* A = \operatorname{rank}A \tag{4.2.13$'$}$$

证 仅证推论 9. 设 $A = A_1 + A_2\mathrm{j}$，$A_1, A_2 \in C^{m \times n}$，

则 $$A^{\mathrm{T}} = A_1^{\mathrm{T}} + A_2^{\mathrm{T}}\mathrm{j}, \quad \bar{A} = \bar{A}_1 - A_2\mathrm{j}$$

故有 $$(A^{\mathrm{T}})^{\sigma} = \begin{pmatrix} A_1^{\mathrm{T}} & -A_2^{\mathrm{T}} \\ \overline{A_2}^{\mathrm{T}} & \overline{A_1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \ (\bar{A})^{\sigma} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & A_1 \end{pmatrix}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}A^{\mathrm{T}} &= \frac{1}{2}\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}})^{\sigma} = \frac{1}{2}\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1^{\mathrm{T}} & -A_2^{\mathrm{T}} \\ \overline{A_2}^{\mathrm{T}} & \overline{A_1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1^{\mathrm{T}} & -A_2^{\mathrm{T}} \\ \overline{A_2}^{\mathrm{T}} & \overline{A_1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 & \bar{A}_2 \\ -A_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{rank}\overline{\begin{pmatrix} A_1 & \bar{A}_2 \\ -A_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \bar{A}_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & A_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{rank}(\bar{A})^{\sigma} = \operatorname{rank}\bar{A}
\end{aligned}$$

故式(4.2.12)成立.

由$(A^*)^\sigma=(A^\sigma)^*$及当 B 为复矩阵时有 $\mathrm{rank}B^*=\mathrm{rank}B$，于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}A^*&=\frac{1}{2}\mathrm{rank}(A^*)^\sigma=\frac{1}{2}\mathrm{rank}(A^\sigma)^*\\&=\frac{1}{2}\mathrm{rank}A^\sigma=\mathrm{rank}A\end{aligned}$$

故式(4.2.13)亦成立. □

二、四元数矩阵的奇异值

设 $A\in Q^{m\times n}$, $\mathrm{rank}A=r$. 于是可不妨设

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

其中 A_{11}为 r 阶可逆子阵，从而下列二方程组

$$Ax=0 \tag{4.2.14}$$

$$(A_{11},A_{12})x=0 \tag{4.2.14$'$}$$

是同解的，而矩阵

$$G=\begin{pmatrix}-A_{11}^{-1} & A_{12}\\ & I_{n-r}\end{pmatrix}\in Q^{n\times(n-r)} \tag{4.2.15}$$

的$(n-r)$列构成方程组(4.2.14)′即方程组(4.2.14)的一个基础解系，方程组的任何解均为此基础解系的右线性组合.

定义 4.2.2 设 Q 上的一组 n 维列向量：

$$\begin{aligned}u_1&=(u_{11},u_{12},\cdots,u_{1n})^{\mathrm T}\\u_2&=(u_{21},u_{22},\cdots,u_{2n})^{\mathrm T}\\&\cdots\cdots\\u_n&=(u_{n1},u_{n2},\cdots,u_{nn})^{\mathrm T}\end{aligned}$$

满足条件

$$u_i{}^* u_j = (\bar{u}_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{in}) \begin{pmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \\ \vdots \\ u_{jn} \end{pmatrix} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

则称 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是一个**广义标准正交组**.

定义 4.2.3 如果 Q 上的方程组(4.2.14)的基础解系(4.1.15)是一个广义标准正交组,即 G 满足 $G^* G = I_{n-r}$,则称它是一个**广义标准正交的基础解系**.

命题 4.2.2 Q 上方程组(4.2.14)有基础解系(即 $r < n$)时,就必存在广义标准正交的基础解系.

证 先取方程组(4.2.14)的一个非零解 u,令 $u_1 = \frac{1}{a} u$,其中 $a = \sqrt{u^* u}$ 为一正实数,这样就把 u 标准化为 u_1,使 $u_1{}^* u_1 = 1$,而$\{u_1\}$构成一广义标准正交组,然后考虑方程组

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & u_1^* \end{pmatrix} X = 0$$

如果 $r+1 < n$,则此方程组又有非零解 u,再把 u 标准化为 u_2,则由

$$u_1{}^* u_2 = 0 = \bar{0} = u_2{}^* u_1, \quad u_1{}^{\mathrm{T}} \bar{u}_1 = u_2{}^{\mathrm{T}} \bar{u}_2 = 1$$

即知$\{u_1, u_2\}$构成一个广义标准正交组.

如果还有 $r+2 < n$,则再看方程组

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & u_1{}^* \\ & u_2{}^* \end{pmatrix} X = 0$$

再任取一非零解并标准化为 u_3,易知$\{u_1, u_2, u_3\}$又为一个广义标准正交组.如此继续下去,最后就得出一广义标准正交基础解系了. □

定义 4.2.4 设 $U\in Q^{n\times t}$,若 $U^*\cdot U=I_t$,则称 U 为**广义列酉阵**,其全体记为 $U^{n\times t}$.

由命题 4.2.2 及文献[1]299 页定理 10 及 292 页定理 2 得

命题 4.2.3 设 $V_1\in U^{n\times t}$,则 $t\leqslant n$,且存在 $U_2\in U^{n\times(n-t)}$,使得$(U_1,U_2)\in U^{n\times n}$.

命题 4.2.4 设 $A\in Q^{m\times n}$,则 $A^*A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$AA^*\in SC_m^{\geqslant}(Q)$.

证 由$(A^*A)^*=A^*A$,故 $A^*A\in SC_n(Q)$,且对任意 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$,有

$$x^*Bx=x^*A^*Ax=(Ax)^*(Ax)\geqslant 0$$

故
$$A^*A\in SC_n^{\geqslant}(Q).$$

同理可证
$$AA^*\in SC_m^{\geqslant}(Q)$$ □

由定理 4.1.14 推论 1 知,半正定自共轭阵的 n 个特征值均非负,故对任意四元数矩阵 A,A^*A 与 AA^* 的 n 个特征值均非负.

定理 4.2.5 设 $A\in Q^{m\times n}$,$\mathrm{rank}A=r$,则存在 $U\in U^{m\times m}$,$V\in U^{n\times n}$,使得

$$U^*AV=\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad D=\mathrm{rank}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)\quad(4.2.16)$$

证 当 $r=0$ 时,命题显然成立.设 $r>0$,由 $\mathrm{rank}A=r$,则 $\mathrm{rank}A^*A=r$,这时 A^*A 为非零的半正定自共轭阵,故由定理 4.1.14 及其推论知,存在 $V\in U^{n\times n}$,使

$$V^*A^*AV=\begin{pmatrix}D^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad D=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$$

其中 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r$ 为 A^*A 的正特征值的算术平方根,记 $V=(V_1,V_2)$,其中 $V_1\in Q^{n\times r}$,$V_2\in Q^{n\times(n-r)}$,则由矩阵分块乘法得:

$$\begin{cases} A^* AV_1 = V_1 D^2 \\ A^* AV_1 = 0, \ A^* AV_2 = 0 \end{cases}$$

从而 $\begin{cases} U_1^* U_1 = I \\ AV_1 = 0, \ AV_2 = 0 \end{cases}$，其中 $U_1 = AV_1 D^{-1}$

于是由命题 4.2.3，有 $U_2 \in U^{m \times (m-r)}$，使 $U = (U_1, U_2) \in U^{m \times n}$ 并且

$$U^* AV = \begin{pmatrix} D^{-1} V_1^* A^* AV_1 & D^{-1} V_1^* A^* AV_2 \\ U_2^* AV_1 & U_2^* AV_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \square$$

定理 4.2.6 设 $A \in Q^{m \times n}$，$\mathrm{rank} A = r > 0$，则有 $U \in U^{m \times r}$，$V \in U^{n \times r}$，使得

$$A = UDV^*, D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r) \qquad (4.2.17)$$

其中 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ 是 $A^* A$ 与 AA^* 的正特征值的算术平方根.

证 类似于定理 4.2.5 的证明可知，存在 $W \in U^{m \times m}$，$Z \in U^{n \times n}$，使得

$$W^* AZ = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D_1 = \mathrm{diag}(\tau_1, \cdots, \tau_r) \qquad ①$$

其中 $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \cdots \geqslant \tau_r > 0$ 是 AA^* 的正特征值的算术平方根. 于是

$$Z^* A^* AZ = Z^* A^* W^* WAZ = \begin{pmatrix} D_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 ${\tau_1}^2 \geqslant {\tau_2}^2 \geqslant \cdots \geqslant {\tau_r}^2 > 0$ 也是 $A^* A$ 的正特征值. 因此 $\sigma_s = \tau_s$，$s = 1, \cdots, n$. 故式(4.2.17)成立. $\square$

注 上面的证明表明，$A^* A$ 与 AA^* 有相同的非负特征值，式(4.2.17)中的 D 是唯一确定的.

定义 4.2.5 设 $A \in Q^{m \times n}$，则称自共轭阵 $A^* A$ 与 AA^* 的公共特征值的非负平方根为 A 的**奇异值**.

有了定义 4.2.5，则由定理 4.2.5 及定理 4.2.6 可得：

定理 4.2.7 设 $A\in Q^{n\times n}$,则存在 $U,V\in U^{n\times n}$,使

$$A=U^{*}\operatorname{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)V \tag{4.2.18}$$

其中 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n\geqslant 0$ 为 A 的 n 个奇异值,称式(4.2.18)为矩阵 A 的**奇异值分解**.

一般把矩阵 A 的特征值记为 $\lambda_s(A)$,矩阵 A 的奇异值记为 $\sigma_s(A)$,则由定义 4.2.5,有

$$\sigma_s(A)=\sqrt{\lambda_s(A^{*}A)},s=1,\cdots,n \tag{4.2.19}$$

且 $\sigma_s(A)$ 按降序排列为 $\sigma_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(A)\geqslant 0$.

显然我们有如下:

定理 4.2.8 当 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$ 时,有

$$\sigma_s(A)=\lambda_s(A),s=1,\cdots,n. \tag{4.2.20}$$

由定理 4.1.14 之推论 2,可得:

定理 4.2.9 设 $A\in Q^{n\times n}$,则对于任意的 $U,V\in U^{n\times n}$,有

$$\sigma_s(U^{*}AV)=\sigma_s(A),s=1,\cdots,n \tag{4.2.21}$$

证 由式(4.2.19)及式(4.1.11),知

$$\sigma_s(U^{*}AV)=\sqrt{\lambda_s((U^{*}AV)^{*}(U^{*}AV))}$$
$$=\sqrt{\lambda_s(V^{*}A^{*}AV)}=\sqrt{\lambda_s(A^{*}A)}=\sigma_s(A)$$

其中 $s=1,\cdots,n$. □

三、四元数矩阵的迹

由于四元数体的非交换性,它给四元数代数理论的研究,当然也包括四元数矩阵迹的性质的研究带来了巨大困难.事实上,关于实(复)矩阵迹的几个简单性质:

1) $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$;

2) 相似矩阵有相同的迹;

3) 一个矩阵的迹等于其全部特征值之和.

它们在四元数矩阵上都不复成立.我们还是从四元数矩阵迹的定

义和简单性质谈起.

定义 4.2.6 设 $A=(a_{ij}), A\in Q^{n\times n}$,则称 A 的主对角元素的和为 A 的**迹**,记作 $\mathrm{tr}A$,即

$$\mathrm{tr}A=\sum_{t=1}^{n} a_{tt} \tag{4.2.22}$$

而 $|\mathrm{tr}A|$ 称为 A 的**迹模**.

四元数矩阵的迹有如下一些性质:

命题 4.2.5 设 $A, B\in Q^{n\times n}, \lambda, \mu\in Q$,则

1° $\mathrm{tr}(\lambda A+\mu B)=\lambda\mathrm{tr}A+\mu\mathrm{tr}B$ (4.2.23)

2° $\mathrm{tr}(A\lambda+B\mu)=(\mathrm{tr}A)\lambda+(\mathrm{tr}B)\mu$ (4.2.24)

注 当四元数矩阵 A 与 B 相似时,$\mathrm{tr}A$ 不一定等于 $\mathrm{tr}B$,这是与常规矩阵不一样的.

为了更进一步讨论四元数矩阵迹的性质,我们先来证明如下定理.

定理 4.2.10 设 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in Q^{n\times n}$,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}BA) \tag{4.2.25}$$

证 由式(1.1.21)与式(1.1.22),有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB))&=\mathrm{Re}\Big(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{st}b_{ts}\Big)\\&=\mathrm{Re}\Big(\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} b_{ts}a_{st}\Big)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(BA))\end{aligned}$$ □

推论 1 设 A、$B\in Q^{n\times n}$,且 A 相似于 B,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B) \tag{4.2.26}$$

证 因 A 相似于 B,则有可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$A=PBP^{-1}$$

于是由式(4.2.25),有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}PBP^{-1})=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}P^{-1}PB)\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B)\end{aligned}$$ □

注 推论 1 表明相似变换不改变四元数矩阵迹的实部.

推论 2 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m \in Q^{n\times n}(m\geqslant 2)$,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A_1A_2\cdots A_m)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A_sA_{s+1}\cdots A_mA_1\cdots A_{s-1}) \quad (4.2.27)$$

对任意 $1\leqslant s\leqslant m$ 均成立.

注 定理 4.2.10 及其推论表明,凡是在复矩阵中关于迹的有关等式或不等式,想移植到四元数矩阵中时,一般都要换成迹的实部.

定理 4.2.11 设 $A\in Q^{n\times n}$,则

1° $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^*)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)$; (4.2.28)

2° $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)=\mathrm{tr}\dfrac{A+A^*}{2}$. (4.2.29)

证 1° 设 $A=(a_{ij})$,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^*)=\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_{ii}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\right)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)$$

2° 显然有 $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}\dfrac{A-A^*}{2})=\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_{ii}-\bar{a}_{ii}}{2}\right)=0$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}[(\frac{A+A^*}{2})+(\frac{A-A^*}{2})]\\&=\mathrm{Retr}\left(\frac{A+A^*}{2}\right)+\mathrm{Retr}\left(\frac{A-A^*}{2}\right)\\&=\mathrm{tr}\left(\frac{A+A^*}{2}\right)\end{aligned}$$

□

定理 4.2.12 设 $A\in Q^{k\times n}$,则

$$\mathrm{tr}AA^*=\mathrm{tr}A^*A \quad (4.2.30)$$

证 设 $A=(a_{ij})$,则

$$\mathrm{tr}AA^*=\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{n}a_{st}\bar{a}_{st}=\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{k}\bar{a}_{st}a_{st}=\mathrm{tr}A^*A$$

□

§4.3 四元数自共轭矩阵的若干性质

我们知道,实对称阵和厄米特(Hermite)阵分别在实矩阵和复矩阵中扮演着非常重要的角色,同样,自共轭阵在四元数矩阵中也起着重要的作用.在第二章第三节已介绍了自共轭阵的基本性质,在第三章论述四元数矩阵的行列式及重行列式以及本章引入四元数矩阵的奇异值时,就都用到了自共轭阵的一些基本性质,这一节,我们讨论自共轭四元数矩阵的更进一步的性质.

命题 4.3.1 设 $A\in SC_n(Q)$,若 A 可逆,则

$$A^{-1}\in SC_n(Q)$$

证 因 $A\in SC_n(Q)$,则 $A^*=A$,由 A 可逆,则 A^{-1} 与 $(A^*)^{-1}$ 均存在且 $(A^*)^{-1}=A^{-1}$. 又由式(2.1.11)有 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$,故 $(A^{-1})^*=A^{-1}$,因此 $A^{-1}\in SC_n(Q)$. □

命题 4.3.2 设 $A\in SC_n(Q)$,$P\in Q^{n\times n}$,则 $P^*AP\in SC_n(Q)$. 特别

1° 若 $A>0$ 或 $A\geqslant 0$, 则 $P^*AP\geqslant 0$;

2° 若 $A>0$,P 可逆, 则 $P^*AP>0$;

3° 若 A 可逆,$D\in SC_m(Q)$, 则

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B^*A^{-1} & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B^*A^{-1} & I_m \end{pmatrix}^*$$
$$=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-B^*A^{-1}B \end{pmatrix} \tag{4.3.1}$$

其中 $D-B^*A^{-1}B\in SC_m(Q)$.

证 因 $A^*=A$,则 $(P^*AP)^*=P^*A^*P=P^*AP$,故 $P^*AP\in SC_n(Q)$.

1° 因 $A>0$,则对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$,有 $x^*Ax>0$. 令 $y=Px$,

则 $y\in Q^{n\times 1}$且 y 可能等于零,于是有 $x(P^*AP)x=y^*Ay\geqslant 0$. 故 $P^*Ay\in SC_n^{\geqslant}(Q)$.

2° 当$A>0$,P 可逆时,则对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$,有 $y=Px\neq 0$,于是有 $x^*(P^*AP)x=y^*Ay>0$,故 $P^*AP\in SC_n^{>}(Q)$.

3° 式(4.3.1)可通过直接计算而验证其成立. 注意到 $A\in SC_n(Q)$,则 $A^{-1}\in SC_n(Q)$,于是有

$$(D-B^*A^{-1}B)^*=D^*-B^*(A^{-1})^*B=D-B^*A^{-1}B$$

故 $D-B^*A^{-1}B\in SC_m(Q)$. □

命题 4.3.3 设 $A\in Q^{n\times n}$,若互换 A 的 i,j 两行,再互换 i,j 两列而得到 B,则 A 相合于 B.

证 令 $P(i,j)$是由 I_n 的 i,j 两列互换而来的,则有$P(i,j)^*=P(i,j)$,且有 $P(i,j)^*AP(i,j)=B$. 故 A 相合于 B. □

命题 4.3.4 设$0\neq A\in SC_n(Q)$,则存在非零的 $p=(p_1,\cdots,p_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$,使 p^*Ap 为非零实数.

证 设 $A=(a_{ij})$,则

$$p^*Ap=\sum_{s,t=1}^{n}\bar{p}_sA_{st}p_t$$

如果有某个 $a_{tt}\neq 0$,则取 $p_t=1$,而其余的 $p_r=0$,这时便有

$$p^*Ap=a_{tt}\neq 0$$

如果 A 的主对角线上的元素均为零,则总有一个 $a_{st}\neq 0$,设

$$a_{st}=a_1+a_2\mathrm{i}+a_3\mathrm{j}+a_4\mathrm{k}\neq 0$$

若其中的 $a_1\neq 0$,则取 $p_s=p_t=1$,而其余的 $p_r=0$,由式(1.1.25),即有

$$\begin{aligned}p^*Ap&=\bar{p}_sa_{st}p_t+\bar{p}_ta_{ts}p_s=a_{st}+a_{ts}\\&=a_{st}+\bar{a}_{st}=2a_1\neq 0.\end{aligned}$$

若 $a_2\neq 0$,则取 $p_s=1$,$p_t=\mathrm{i}$,而其余的 $p_r=0$,则由式(1.1.26)有 $p^*Ap=a_{st}\mathrm{i}-\mathrm{i}\bar{a}_{st}=-2a_2\neq 0$

若 $a_3 \neq 0$, 则取 $p_s = 1$, $p_t = \mathrm{j}$, 而其余的 $p_r = 0$, 则由式(1.1.27)有 $p^* Ap = a_{st}\mathrm{j} - \mathrm{j}\bar{a}_{st} = -2a_3 \neq 0$

若 $a_4 \neq 0$, 则取 $p_s = 1$, $p_t = \mathrm{k}$, 而其余的 $p_r = 0$, 则由式(1.1.28)有 $p^* Ap = a_{st}\mathrm{k} - \mathrm{k}\bar{a}_{st} = -2a_4 \neq 0$. □

定理 4.3.1 设 $A \in SC_n(Q)$, $\mathrm{rank}A = r$, 则存在可逆阵 $P \in Q^{n \times n}$, 使

$$A = P^* \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1, 0, \cdots, 0) P \quad (4.3.2)$$

其中 1 的总个数 s 与 -1 的总个数 t 之和 $s + t = r$, 且可以不出现 1 与 -1 的二者之一.

证 由 $A \in SC_n(Q)$ 及命题 3.3.1 知, 存在可逆阵 $P_1 \in Q^{n \times n}$, 使

$$P_1^* AP_1 = \mathrm{diag}(c_1, \cdots, c_n) = C, c_i \in R, 1 \leqslant i \leqslant n.$$

再对矩阵 C, 累用命题 4.3.3, 可知存在可逆阵 $P_2 \in Q^{n \times n}$, 使

$$P_2^* CP_2 = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_s, -b_1, \cdots, -b_t, 0, \cdots, 0) = B,$$

其中 $a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_t > 0$, 且由相合变换不改变矩阵的秩(定理 4.2.4 之推论 5)知 $s + t = r$.

再令 $P_3 = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{a_s}}, \frac{1}{\sqrt{b_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{b_t}}, 1, \cdots, 1\right) \in Q^{n \times n}$, 则 P_3 可逆, 且

$$P_3^* BP_3 = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1, 0, \cdots, 0)$$

于是令 $P = P_1P_2P_3$, 则 P 可逆, 且有

$$P^* AP = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1, 0, \cdots, 0)$$

即式(4.3.2)成立, 由于相合变换不改变矩阵的秩数, 故必有 $s + t = r$. □

注 定理 4.3.1 实际上给出了 n 阶自共轭阵 A 在相合变换下的标准形是:

$$P^*AP=\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}, s+t=r=\text{rank}A \qquad (4.3.2)'$$

式(4.3.2)中的 s 与 t 分别称为 A 的**正惯性指数与负惯性指数**.

定理 4.3.2 设 $A\in Q^{n\times n}$,则下列诸命题等价:

1° $A\in SC_n^>(Q)$;

2° 存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使 $P^*AP=I_n$;

3° 存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使 $A=P^*P$;

4° $A\in SC_n(Q)$且 $\lambda_s(A)>0, s=1,\cdots,n$

证 1°⇔4°,由定理 4.1.14 及其推论 1°即知.

1°⇒3° 由 $A\in SC_n^>(Q)$及定理 4.1.14 知存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$UAU^*=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_t>0, t=1,\cdots,n \qquad ①$$

令
$$P_1=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}, \quad P=P_1U$$

则 P 是可逆的,且由式①,有

$$A=(P_1U)^*(P_1U)=P^*P$$

3°⇒2° 显然

2°⇒1° 由 $P^*AP=I_n$ 及式(2.1.11)有

$$A=(P^*)^{-1}I_nP^{-1}=(P^{-1})^*P^{-1}$$

则 $A^*=A$,故 $A\in SC_n(Q)$,又对任意 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in Q^{n\times 1}$,令 $P^{-1}x=y$,则 $y\neq 0$,且

$$x^*Ax=(P^{-1}x)^*(P^{-1}x)=y^*y>0$$

故 $A\in SC_n^>(Q)$. □

定义 4.3.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 A 的诸行在 Q 上右线性无关,

则称 A 为 Q 上的**右高矩阵**.

定理 4.3.3 设 $A\in Q^{n\times n}$,下列诸命题等价:

1° $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$;

2° A 与下列矩阵是相合的

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.3}$$

其中 $r\leqslant n$;

3° $A=L^*L$,其中 $L\in Q^{r\times n}$,为右高矩阵;

4° $A=S^*S$,其中 $S\in Q^{n\times n}$;

5° $A\in SC_n(Q)$且 $\lambda_s(A)\geqslant 0, s=1,\cdots,n$.

证 1°⇔5° 由定理 4.1.14 及其推论 2 即知.

1°⇒2° 设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$. 由定理 4.3.1 知有可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使 P^*AP 呈现(4.3.2)式那样的矩阵,现要此对角阵为式(4.3.3),必要且只要,此时式(4.3.2)中不出现 -1,假若出现 -1,设第 i 个对角元素为 -1,令

$$x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}=P(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

其中 1 在第 i 个位置,这时就有

$$x^*Ax=-1<0$$

导出矛盾. 故此时式(4.3.2)必为式(4.3.3).

2°⇒3° 设有可逆阵 P 使 P^*AP 为式(4.3.3),令 L 为 $(P^*)^{-1}$的前 r 行作成的子块,即设 $P^{-1}=\begin{pmatrix} L \\ P_0 \end{pmatrix}$,则 L 的诸行在 Q 上右线性无关,即是右高矩阵,且有

$$\begin{aligned} A &= (P^{-1})^*\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}=(L^*,P_0^*)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L \\ P_0 \end{pmatrix} \\ &= L^*L \end{aligned}$$

3°⇒4° 取 $S=L$ 即可.

4°⇒1° 由 $A=S^*S$,则 $A^*=S^*S=A$,故 $A\in SC_n(Q)$,

于是由定理 4.1.14 知，$\exists\, U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_i\in R,i=1,\cdots,n$$

$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为 A 的全部特征值，即有

$$(US)^*(US)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_i\in R,i=1,\cdots,n$$

$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为 A 的全部特征值，即有

$$(US)^*(US)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_i\in R,i=1,\cdots,n$$

于是对任意 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^n$，有

$$0\leqslant(USx)^*(USx)=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$$

分别取 x 为$(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$(其中 1 在第 i 个位置)代入上式即得 $\lambda_i\geqslant0(i=1,\cdots,n)$，再由 5°即知 1°成立. □

定理 4.3.4 Q 上的相合变换不改变矩阵的自共轭性、正定性或半正定性.

证 设 $A\in Q^{n\times n}$，若 A 自共轭，B 与 A 相合，则存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$B=P^*AP \qquad ①$$

于是

$$B^*=(P^*AP)^*=P^*A^*P=P^*AP=B,$$

故 B 仍是自共轭的.

若 A 正定，则由定理 4.3.2 知，有可逆阵 $T\in Q^{n\times n}$，使 $A=T^*T$，于是由式①，有

$$B=P^*AP=(TP)^*(TP)$$

注意到 TP 亦可逆，故由定理 4.3.2 即知 B 是正定的.

同理可证，当 A 是半正定时，则 B 亦是半正定的. □

定理 4.3.5 设 $A\in SC_n(Q)$，则 A 为(半)正定的充分必要条件是 A 的各阶顺序主子式皆为正(皆为非负).

证 先证必要性，对 A 的阶数用归纳法. 当 $n=1$ 时，显然成立. 假定对 $n-1$ 阶的矩阵断言成立，现在看 n 阶的自共轭阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

并令其左上角的 $n-1$ 阶子块为自共轭阵

$$A_0=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

因 A 是正定的，则对任意 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_{n-1})^{\mathrm{T}}\in Q^{(n-1)\times 1}$，有

$$x^*A_0x=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_{n-1},0)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}>0$$

故 A_0 亦为正定的. 由归纳假设知，A_0 的各阶顺序主子式皆为正，从而知 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式均为正，最后只要再证 $|A|>0$ 就行了. 由定理 4.3.2 之 4°知，A 的所有特征值皆为正，再由定理 4.1.14 知，存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*AU=\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(\lambda)),\lambda_s(A)>0,s=1,\cdots,n \quad ①$$

于是由定理 3.2.7 及式①，即知

$$|A|=|U^*AU|=\prod_{s=1}^{n}\lambda_s(A)>0$$

再证充分性，也采用归纳法. 当 $n=1$ 时结论显然成立. 现假设 $n-1$ 阶时结论成立，下证 n 阶时结论亦成立.

设自共轭阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，A 的各阶顺序主子式皆为正，要证

A 是正定的. 令 $B=(a_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}\in Q^{(n-1)\times(n-1)}$,由假设知 B 的各阶顺序主子式皆为正,知 B 是正定的,由上面已证的必要性知,$|B|>0$,于是 $\|B\|=|B|^2\neq 0$,由定理 3.3.5 知 B 是可逆的. 又由命题 3.3.1 推论知,存在可逆阵 $S\in Q^{(n-1)\times(n-1)}$,使

$$S^*BS=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}),\lambda_t>0,t=1,\cdots,n-1$$

且 $$|B|=|S^*BS|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$$

其中 S 是一系列 $(n-1)$ 阶初等矩阵 $P(i,j)$ 与 $P(i,j_\lambda)$ 的乘积,记

$$A=\begin{pmatrix}B & C\\ C^* & a_{nn}\end{pmatrix},\ 其中\ C=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{n-1,n}\end{pmatrix}$$

令 $D=-B^{-1}C$,则 $D^*=-C^*(B^{-1})^*$,$D^*B^*=-C^*$,于是,有

$$\begin{pmatrix}S_* & 0\\ D^* & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}S & D\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_* & 0\\ D^* & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & C\\ C^* & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S & D\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}S^*BS & 0\\ 0 & a_{nn}-C^*(B^{-1})C\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \ddots & & \vdots\\ & & \lambda_{n-1} & 0\\ & 0 & & a_{nn}-C^*(B^{-1})^*C\end{pmatrix}$$

记 $$\lambda_n=a_{nn}-C^*(B^{-1})^*C$$

显然 $\begin{pmatrix}S & D\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 可分解为一系列 n 阶初等矩阵 $P(i,j)$ 与 $P(i,j_\lambda)$ 的乘积,故有

$$|A|=\left|\begin{pmatrix}S^* & 0\\ D^* & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}S & D\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\right|$$

$$=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|B|\cdot\lambda_n$$

由已知$|A|>0$,且$|B|>0$,则由上式知$\lambda_n>0$,故矩阵相合于$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,此处$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$皆为正数,即$A$是正定的.半正定的情形同理可证. □

推论 设$A\in SC_n(Q)$,则A为(半)正定的充要条件是A的各阶主子式皆为正(非负).

证 充分性由定理4.3.5的充分性即知.下面证必要性.我们可用第二套初等变换把A的任一主子阵化成另一矩阵B的一个顺序主子阵,而B与A是相合的,故B仍为自共轭阵且由A为正定的及定理4.3.8易知B为正定的,而由定理4.3.3的必要性知B的各阶顺序主子式皆为正,因此A的各阶主子式皆为正. □

定理4.3.6 设$A\in SC_n(Q)$,$\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A)$为$A$的$n$个特征值,则

$$1^\circ\ \det A=\prod_{s=1}^{n}\lambda_s(A) \tag{4.3.4}$$

$$2^\circ\ \mathrm{tr}A=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A) \tag{4.3.5}$$

$$3^\circ\ \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}N(a_{st})=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^2(A) \tag{4.3.6}$$

4° 当$|\lambda_1(A)|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n(A)|$时,有

$$|\lambda_s(A)|=\sigma_s(A),s=1,\cdots,n \tag{4.3.7}$$

特别当$A\geqslant0$时,有$\lambda_s(A)=\sigma_s(A),s=1,\cdots,n$ (4.3.8)

5° 当$A>0$时,则A可逆,且$A^{-1}\in SC_n^{>}(Q)$,当$\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$,$\lambda_1(A^{-1})\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A^{-1})$时,有

$$\lambda_s(A^{-1})=\lambda_{n-s+1}^{-1}(A),s=1,\cdots,n \tag{4.3.9}$$

6° 当$A>0$时,有$|A|>0,\mathrm{tr}A>0$ (4.3.10)

7° 当$A\geqslant0$时,有$|A|\geqslant0,\mathrm{tr}A\geqslant0$ (4.3.11)

证 1° 由$A\in SC_n(Q)$及定理4.1.14知,存在$U\in U^{n\times n}$,使

$$UAU^* = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(A) \end{pmatrix} = D \qquad ①$$

再由定理 3.2.7 知

$$\det A = \det D = \prod_{s=1}^{n} \lambda_s(A)$$

2° 由式①,有

$$A = U^* \mathrm{diag}(\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A)) U$$

设 $U = (u_{st})$,则

$$\mathrm{tr} A = \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A) |u_{st}|^2 = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A)$$

3° 由式①,有

$$\begin{aligned} U^* A^* AU &= (U^* A^* U)(U^* AU) \\ &= (U^* AU)(U^* AU) \\ &= \mathrm{diag}(\lambda_1^2(A), \cdots, \lambda_n^2(A)) \end{aligned}$$

又因 $A^* A \in SC_n(Q)$,故由 2°有

$$\mathrm{tr}(A^* A) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^2(A)$$

又显然有 $$\mathrm{tr}(A^* A) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} N(a_{st})$$

因此有 $$\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} N(a_{st}) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^2(A).$$

4° 当 $A \in SC_n(Q)$ 时,有 $A^* = A$,于是

$$\begin{aligned} \sigma_s(A) &= \sqrt{\lambda_s(A^* A)} = \sqrt{\lambda_s(A^2)} \\ &= \sqrt{\lambda_s^2(A)} = |\lambda_s(A)|, s = 1, \cdots, n \end{aligned}$$

特别当 $A \geqslant 0$ 时,有 $\lambda_s(A) \geqslant 0$,故有

$$\sigma_s(A) = |\lambda_s(A)| = \lambda_s(A), s = 1, \cdots, n$$

5° 因为 $\lambda(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda(A)}$,当把矩阵的特征值排成降序的形式

时自然有式(4.3.9)成立.

再由 1°、2°即知 6°、7°成立. □

定理 4.3.7 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 A 是中心封闭阵,$\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$是 A 的 n 个实特征值,则

1° $$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A) \tag{4.3.12}$$

2° $$\|A\|=\prod_{s=1}^{n}\lambda_s^2(A) \tag{4.3.13}$$

3° 当$\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)>0$ 时,A^{-1}存在且亦为中心封闭阵,并有

$$\lambda_s(A^{-1})=\lambda_{n-s+1}(A),\quad s=1,\cdots,n \tag{4.3.14}$$

4° 若$B\sim A$,则 B 亦为中心封闭阵,且

$$\lambda_s(B)=\lambda_s(A),\quad s=1,\cdots,n \tag{4.3.15}$$

证 1° 因A 为中心封闭阵,则存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$A=P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots\lambda_n(A))P \qquad ①$$

于是由式①与定理 4.2.10 推论 2 及定理 4.3.2,知

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))P))\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))))\\&=\mathrm{Re}(\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A))=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\end{aligned}$$

2° 由式①及定理 3.3.3,知

$$\begin{aligned}\|A\|&=\|P^{-1}\|\,\|\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))\|\,\|P\|\\&=\|P^{-1}P\|\cdot\|\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))\|\\&=\prod_{s=1}^{n}\lambda_s^2(A)\end{aligned}$$

3° 当诸 $\lambda_s(A)>0$ 时,由式①即知 A 可逆,从而显然有式(4.3.14)成立.

4° 由B 与A 相似,则存在可逆阵 $Q\in Q^{n\times n}$,使

$$B=Q^{-1}AQ$$

于是由式①及上式有

$$B=Q^{-1}P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))PQ \qquad ②$$

令 $P_1=PQ$,则 P_1 可逆,且由式②有

$$B={P_1}^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))P_1$$

可见 B 仍是中心封闭阵,且

$$\lambda_s(B)=\lambda_s(A),s=1,\cdots,n$$

□

推论 相似变换不改变中心封闭阵的中心封闭性,也不改变中心封闭阵的特征值、迹的实部及重行列式.

定理 4.3.8 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 的主子阵能继承其自共轭性、正定性或半正定性.

证 设 $A\in Q^{n\times n}$,若 A 是自共轭的,则显然 A 的各主子阵也是自共轭的;若 A 还是正定的,A_k 是 A 的 k 阶主子阵,由定理 4.3.5 之推论的必要性知,A 的各阶主子式皆为正,从而 A_k 的各阶主子式亦皆为正,再由定理 4.3.5 推论的充分性即知 A_k 亦是正定的. 半正定的情形同理可证. □

定理 4.3.9 相似变换不改变自共轭阵的特征值,酉相似变换不改变自共轭阵的行列式与迹.

证 因为自共轭阵必是中心封闭阵,故由定理 4.3.6 知,相似变换不改变自共轭阵的特征值. 又由于酉相似也是酉相合,故由命题 4.3.3 知,酉相似变换也不改变矩阵的自共轭性,进而由定理 4.3.6,即知酉相似变换不改变自共轭阵的行列式与迹. □

定理 4.3.10 设 $A、B\in SC_n(Q)$,$A>0$,$B\geqslant 0$,则有可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$\left.\begin{aligned}&P^*AP=I_n\\&P^*BP=\begin{pmatrix}b_1&&\\&\ddots&\\&&b_n\end{pmatrix},b_s\geqslant 0,s=1,\cdots,n\end{aligned}\right\}\qquad(4.3.16)$$

证 由 $A\in SC_n(Q)$, $A>0$ 及定理 4.3.2 知,有可逆阵 $P_0\in Q^{n\times n}$,使

$$P_0{}^* AP_0=I_n$$

由 $B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$及定理 4.3.4 知,$P^*BP\in SC_n^{\geqslant}(Q)$. 于是由定理 4.1.14 知,有 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^*P_0{}^*BP_0U=\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}, b_s\geqslant 0, s=1,\cdots,n$$

令 $P=UP_0$,则 P 可逆,且

$$P^*AP=U^*P_0{}^*AP_0U=U^*I_nU=I_n$$

$$P^*BP=U^*P_0{}^*BP_0U=\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}, b_s\geqslant 0, s=1,\cdots,n \quad \square$$

命题 4.3.5 设 $A=(a_{ij})\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,若对某个 i 有 $a_{ii}=0$,则 $a_{ij}=a_{ji}=0$, $\forall j=1,2,\cdots,r$, $r=\text{rank}A$.

证 因 $\text{rank}A=r$,则由定理 4.3.3,有 $A=RR^*$,其中 $R=(p_{ij})\in Q^{n\times r}$,从而 $a_{ii}=\sum\limits_{k=1}^{r}p_{ik}\bar{p}_{ik}=\sum\limits_{k=1}^{r}N(p_{ik})=0$,由此推出 $p_{ij}=0(j=1,2,\cdots,r)$,于是 $a_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{r}p_{ik}\bar{p}_{ij}=0$,与此同时 $a_{ji}=\bar{a}_{ij}=0(j=1,2,\cdots,r)$. $\square$

命题 4.3.6 设 $B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,若 $B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2{}^* \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}$,则

1° $\text{rank}(B_2,B_3)=\text{rank}B_3$,且 $B_3x=-B_2$ 有解;

2° $\text{rank}(B_1,B_2{}^*)=\text{rank}B_1$,且 $B_1x^*=B_2{}^*$有解.

证 因为 $B\geqslant 0$,由定理 4.3.8 知 B_1 与 B_3 均为半正定,设 B_3 为 t 阶方阵,则由定理 4.1.14 之推论知有 $U\in U^{t\times t}$,使得

$$UB_3U^*=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t \end{pmatrix}\geqslant 0$$

于是

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2{}^* \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & (UB_2)^* \\ UB_2 & B_4 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

其中 $B_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t \end{bmatrix}$. 又由命题 4.3.5 知,若 $\lambda_i = 0$,则(UB_2, B_4)的第 i 行全为 0,从而

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(B_2, B_3) &= \operatorname{rank} U(B_2, B_3)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rank}(UB_2, B_4) = \operatorname{rank} B_3 \end{aligned}$$

最后由文献[1]299 页定理 9 知 $B_3X = -B_2$ 恒有解,于是 1°得证. 同样可证明 2°. □

定理 4.3.11 设 $A, B \in SC_n(Q)$,则存在可逆阵 $P \in Q^{n\times n}$,使得

$$\left.\begin{aligned} P^*AP &= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P^*BP &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \lambda_t \geqslant 0, t = 1, \cdots, n. \end{aligned}\right\} \quad (4.3.17)$$

证 若 $A > 0$,由定理 4.3.10,结论显然成立;若 $\operatorname{rank} A = r < n$,则由定理 4.3.3 知存在可逆阵 $P \in Q^{n\times n}$,使

$$A_0 = P^*AP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

而由定理 4.3.4 知,$B_0 = P^*BP = \begin{pmatrix} B_1 & B_2{}^* \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix} \in SC_n^{\geqslant}(Q)$,其中 $B_1 \in Q^{r\times r}$. 令

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}$$

其中 X 满足 $B_3X = -B_2$(这一矩阵方阵的有解由命题 4.3.6 可

知).显然 L 可逆且容易验证有

$$L^*AL=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, L^*BL=\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

由定理 4.3.4 与定理 4.3.5 知 M 与 N 均为半正定,从而有广义酉阵 V_1 及 V_2 使得

$$\begin{pmatrix} V_1^* & 0 \\ 0 & V_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{bmatrix}, \mu_t \geqslant 0$$

其中 $t=1,\cdots,n$,而此时又有

$$\begin{pmatrix} V_1^* & 0 \\ 0 & V_2^* \end{pmatrix} L^* A_0 L \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是只须令

$$P=UL\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$$

即得

$$P^*AP=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^*BP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \lambda_t \geqslant 0, t=1,\cdots,n$$

□

定理 4.3.12 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则

1° 存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使得 P^*AP 与 $P^{-1}B(P^*)^{-1}$ 同时为实对角阵,即

$$\left.\begin{aligned} &P^*AP=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &P^{-1}B(P^*)^{-1}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \lambda_t \geqslant 0, t=1,\cdots,n \end{aligned}\right\} \quad (4.3.18)$$

2° AB 与 BA 相似于同一非负实对角阵,从而它们是具有相同非负特征值的中心封闭阵.且若 A、B 可换,则

$$AB = BA \in SC_n^{\geqslant}(Q)$$

证 1° 仿命题4.3.6的证明，只须取其中 X 满足矩阵方程：$B_1X^* = B_2^*$ 即可.

2° 由式(4.3.18)，有

$$P^*AB(P^*)^{-1} = (P^*AP)(P^{-1}BP^{*-1})$$

$$= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \lambda_t > 0, t = 1, \cdots, r$$

$$P^*BAP = (P^{-1}BP^{*-1})(P^*AP) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \lambda_t > 0, t = 1, \cdots, r$$

故2°成立. □

类似地，我们还可得：

定理 4.3.13 设 $A, B \in SC_n^{>}(Q)$，则 AB 与 BA 相似于同一正实对角阵，从而它们是具有相同正特征值的中心封闭阵，且当 A, B 可换时，有 $AB = BA \in SC_n^{>}(Q)$.

定理 4.3.14 设 $A, B \in SC_n(Q)$，$A > 0$，$B \geqslant 0$，则 AB 与 BA 相似于同一非负实对角阵，从而它们是具有相同非负特征值的中心封闭阵，且当 A, B 可换时，有 $AB = BA \in SC_n^{\geqslant}(Q)$.

定理 4.3.15 设 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则 $AB, BA, A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$,

$B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}$为相似的中心封闭阵，且

$$\lambda_s(AB)=\lambda_s(BA)=\lambda_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})$$
$$=\lambda_s(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})\geqslant 0,\quad s=1,\cdots,n. \tag{4.3.19}$$

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}BA)=\mathrm{tr}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}=\mathrm{tr}B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}} \tag{4.3.20}$$

证 不妨设 $\mathrm{rank}A=r$，则由自共轭阵的谱分解定理 4.1.14 知，存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$UAU^*=\mathrm{diag}(D,0),D=\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_r(A))>0 \qquad ①$$

由定理 4.3.4 知，有 $UBU^*\in SC_n^{\geqslant}(Q)$.

设 $UBU^*=\begin{pmatrix}B_1 & B_2{}^*\\ B_2 & B_3\end{pmatrix}$，其中 $B_1\in Q^{r\times r}$，且由定理 4.3.8 知$B_1\in SC_r^{\geqslant}(Q)$.

令

$$U=\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\end{pmatrix},\ 其中\ U_1\in U^{r\times n}$$

则

$$UA^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}U^*=UA^{\frac{1}{2}}U^*\,UBU^*\,UA^{\frac{1}{2}}U^*$$
$$=\begin{pmatrix}D^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\end{pmatrix}B(U_1{}^*,U_2{}^*)\begin{pmatrix}D^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}D^{\frac{1}{2}}U_1BU_1{}^*D^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\mathrm{diag}(D^{\frac{1}{2}}U_1BU_1{}^*D^{\frac{1}{2}},0) \qquad ②$$

令 $L=\begin{pmatrix}I & 0\\ X & I\end{pmatrix}\in Q^{n\times n}$，其中 X 满足$B_1X=-B_2$（这一方程有解，由定理命题 4.3.6 可知），于是 L 可逆且有

$$[U^*\mathrm{diag}(D^{\frac{1}{2}},I)L^*]^{-1}AB[U^*\mathrm{diag}(D^{\frac{1}{2}},I)L^*]$$

$$=\mathrm{diag}(D^{\frac{1}{2}}U_1BU_1{}^*D^{\frac{1}{2}},0) \qquad ③$$

由式②,③知,$A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$与 AB 相似.而由定理4.3.12知 AB 与 BA 是具有相同非负特征值的中心封闭阵.再由定理4.1.16知,$A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$亦为中心封闭阵,且

$$\lambda_s(AB)=\lambda_s(BA)=\lambda_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}),s=1,\cdots,n.$$

同理可证

$$\lambda_s(BA)=\lambda_s(AB)=\lambda_s(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}),s=1,\cdots,n.$$

故式(4.4.19)成立.

又由定理4.2.10推论2,有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}BA)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}BA^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}})\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

由于 $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}},B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$\mathrm{tr}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}=\mathrm{tr}B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})\geqslant 0$$

故式(4.3.20)成立. □

推论 设 $A,B\in SC_n(Q)$,则

1° 当$A\geqslant 0,B\geqslant 0$ 或 $A>0,B\geqslant 0$ 或 $A\geqslant 0,B>0$ 时,有

$$A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}},B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}\in SC_n^{\geqslant}(Q);$$

2° 当$A>0,B>0$时,有 $A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}},B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}\in SC_n^{>}(Q)$.

证 当 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$时,则$(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^*=(A^{\frac{1}{2}})^*B^*(A^{\frac{1}{2}})^*=A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$,故 $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\in SC_n(Q)$.又由定理4.3.15知 $\lambda_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})\geqslant 0(s=1,\cdots,n)$,从而由定理4.3.3知,$A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,同理可证其他情形. □

定理 4.3.16 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$,m 为正整数,则$(AB)^m$,

$(BA)^m,(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m,(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})^m$ 皆为相似中心封闭阵，且有

$$\lambda_s((AB)^m)=\lambda_s((BA)^m)=\lambda_s((A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m)$$
$$=\lambda_s((B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})^m),s=1,\cdots,n \quad (4.3.21)$$

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB)^m)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(BA)^m)=\mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m$$
$$=\mathrm{tr}(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})^m \quad (4.3.22)$$

证 由定理 4.3.15 知 $AB,BA,A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}},B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}$ 为相似的中心封闭阵，故存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$AB=P^{-1}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}P$$

故 $$(AB)^m=(P^{-1}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}P)^m=P^{-1}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^mP$$

因此 $(AB)^m$ 与 $(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m$ 相似.

注意到 $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则 $(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，于是由定理 4.1.17 知，$(AB)^m$ 为中心封闭阵，且

$$\lambda_s((AB)^m)=\lambda_s((A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m),s=1,\cdots,n$$

同理可证式(4.3.21)的其他等式.

又由定理 4.2.10 知，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB)^m)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(ABAB\cdots AB))\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}B\cdots A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}B))\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\cdots A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}))\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m)\\&=\mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m\end{aligned}$$

同理可证式(4.3.22)中的其他等式. □

对于自共轭四元数矩阵的导出阵，有如下

定理 4.3.17 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则

1° $A^\sigma, B^\sigma \in SC_{2n}^{\geqslant}(C)$

2° $AB, (AB)^\sigma = A^\sigma B^\sigma$ 分别在 Q, C 上相似于非负实对角阵，且对每个 $s(s=1,\cdots,n)$有

$$\lambda_s(A) = \sigma_s(A) = \lambda_{2s-1}(A^\sigma) = \lambda_{2s}(A^\sigma)$$
$$= \sigma_{2s-1}(A^\sigma) = \sigma_{2s}(A^\sigma) \qquad (4.2.23)$$
$$\lambda_s(AB) = \lambda_{2s-1}(A^\sigma B^\sigma) = \lambda_{2s}(A^\sigma B^\sigma) \qquad (4.2.24)$$

证 由 $A \in SC_n^{\geqslant}(Q)$及定理4.1.14知，存在 $U \in U^{n\times n}$，使

$$A = U^* \mathrm{diag}(\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A))U, \lambda_s(A) \geqslant 0, s=1,\cdots,n \qquad ①$$

由定理4.2.8知，

$$\lambda_s(A) = \sigma_s(A), s=1,\cdots,n, \qquad ②$$

于是由式①，并利用式(2.3.15)，(2.3.17)，有

$$A^\sigma = (U^\sigma)^* \mathrm{diag}(\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A), \lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A))U^\sigma \qquad ③$$

由式③，②即知 $A^\sigma \in SC_{2n}^{\geqslant}(C)$，且式(4.3.23)成立.

又由定理4.3.15知

$$\lambda_s(AB) \geqslant 0, s=1,\cdots,n$$

且存在可逆阵 $P \in Q^{n\times n}$，使

$$PABP^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1(AB), \cdots, \lambda_n(AB)) \qquad ④$$

这样由式④并利用式(2.3.15)及式(2.3.16)，有

$$P^\sigma A^\sigma B^\sigma (P^\sigma)^{-1}$$
$$= \mathrm{diag}(\lambda_1(AB), \cdots, \lambda_n(AB), \lambda_1(AB), \cdots, \lambda_n(AB)) \qquad ⑤$$

于是由式⑤，即知$(AB)^\sigma = A^\sigma B^\sigma$ 在C上相似于非负实对角阵，且有式(4.2.24)成立. □

对于自共轭四元数矩阵的迹，有如下

定理4.3.18 设 $A, B \in SC_n(Q)$，则

$$\mathrm{tr}AB = \overline{\mathrm{tr}BA} \qquad (4.3.25)$$

证 设 $BA = (c_{st})_{n\times n}$，则

$$\overline{\mathrm{tr}BA} = \overline{\sum_{s=1}^{n} c_{ss}} = \sum_{s=1}^{n} \bar{c}_{ss} = \mathrm{tr}(BA)^*$$

注意到 $A^* = A, B^* = B$，则有 $(BA)^* = A^* B^* = AB$，由此即知式(4.3.25)成立. □

定理 4.3.19 设 $A, B \in SC_n(Q)$，则

$$\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA \Leftrightarrow \mathrm{tr}AB \in R.$$

证 当 $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$ 时，由式(4.3.25)即知有 $\mathrm{tr}AB \in R$，反之，当 $\mathrm{tr}AB \in R$ 时，由式(4.3.25)，有

$$\overline{\mathrm{tr}BA} = \mathrm{tr}AB = \overline{\mathrm{tr}AB}$$

故 $\mathrm{tr}BA = \mathrm{tr}AB$. □

定理 4.3.20 设 $A, B \in SC_n(Q)$，则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB) = \mathrm{tr}\,\frac{AB + BA}{2} \tag{4.3.26}$$

证 由式(4.3.25)知

$$\mathrm{tr}AB + \mathrm{tr}BA = \mathrm{tr}AB + \overline{\mathrm{tr}AB}$$

由此即知式(4.3.26)成立. □

定理 4.3.21 设 $A \in SC_n(Q), U \in U^{n \times n}$，则

$$\mathrm{tr}(UAU^*) = \mathrm{tr}A \tag{4.3.27}$$

证 由定理 4.3.9 即得 □

定理 4.3.22 设 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(AB) \geqslant 0 \tag{4.3.28}$$

证 由定理 4.3.15 知，AB 在 Q 上相似于非负实对角阵，即存在可逆阵 $P \in Q^{n \times n}$，使

$$PABP^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_i(AB), \cdots, \lambda_n(AB)) = D$$

其中， $\lambda_s(AB) \geqslant 0, s = 1, \cdots, n$

又由定理 4.2.10 之推论 1 知，相似变换不改变矩阵迹的实部，故有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB) = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}D) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(AB) \geqslant 0.$$ □

第五章　四元数矩阵中的不等式

不等式是一个广阔的数学领域,从某种意义上来说,不等式比等式有更大的用处,具有更普遍的意义,它在各个数学分支中都扮演着非常重要的角色,这个领域里的成果也异常丰富.

在这一章里,我们将从凸函数、控制不等式、双随机矩阵出发,在一些熟知的基本数值不等式的基础上,讨论与四元数矩阵的诸数值特征相联系的一系列不等式,其中有些结果就是对常规矩阵来说也是新的.

§5.1　凸函数　双随机矩阵　控制不等式

一、凸函数

定义 5.1.1　设 $f(t)$是区间 I 上的实函数,若对任意 $x,y\in I$ 及任意$\alpha\in(0,1)$,恒有

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) \tag{5.1.1}$$

则称 f 是区间 I 上的**下凸函数**;若式(5.1.1)中的等号当且仅当 $x=y$ 成立,则称 f 是**严格下凸**的;若式(5.1.1)中的不等号反向,则称 f 是 I 上的**上凸函数**;类似地可定义**严格上凸**;下凸函数与上凸函数统称为**凸函数**;严格下凸函数与严格上凸函数统称为**严格凸函数**.

定理 5.1.1　设 $f(t)$是 I 上实函数,若 $f(t)$在 I 上二阶可导,且 $f''(t)\geqslant0(\leqslant0)$, $\forall\, t\in I$,则 $f(t)$是 I 上的下(上)凸函数,

且当 $f''(t)>0(<0)$ 时，$f(t)$ 为严格下(上)凸函数.

证 $\forall t_1<t_2<t_3\in I$，由拉格朗日中值定理，有 $\theta_1\in(t_1,t_2)$，$Q_2\in(t_2,t_3)$，使得

$$f(t_2)-f(t_1)=f'(\theta_1)(t_2-t_1)$$
$$f(t_3)-f(t_2)=f'(\theta_2)(t_3-t_2)$$

由 $f''(t)\geqslant 0$ 知 $f'(t)$ 在 I 上单增，故 $f'(\theta_1)\leqslant f'(\theta_2)$，于是有

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}\leqslant\frac{f(t_3)-f(t_2)}{t_3-t_2} \quad ①$$

由 t_1,t_2,t_3 的取法的任意性，且 $t_2=\alpha t_1+(1-\alpha)t_3$，有 $\alpha=\dfrac{t_3-t_2}{(t_3-t_1)}\in(0,1)$，可将式①变形为

$$f(t_2)(\frac{1}{t_2-t_1}+\frac{1}{t_3-t_2})\leqslant\frac{f(t_1)}{t_3-t_2}+\frac{f(t_1)}{t_2-t_2}$$

即
$$f(t_2)\leqslant\frac{t_3-t_2}{t_3-t_1}f(t_1)+\frac{t_2-t_1}{t_3-t_1}f(t_3)$$
$$=\alpha f(t_1)+(1-\alpha)f(t_2)$$

故 $f(t)$ 是 I 上的下凸函数，且由式①的由来易见严格凸性函数的条件.上凸和严格上凸的情形可仿证之. □

由凸函数定义易得如下

定理 5.1.2 设 $f(t)$ 是区间 I 上的下凸函数，则

1° 对 $\forall x_1,x_2;y_1,y_2\in I$ 且 $x_1\geqslant x_2$，$y_1\geqslant y_2$，$x_1\neq y_1$，$x_2\neq y_2$，有

$$\frac{f(x_1)-f(y_1)}{x_1-y_1}\geqslant\frac{f(x_2)-f(y_2)}{x_2-y_2} \tag{5.1.2}$$

2° 设 $x_1,\cdots,x_n\in I$，$p_i>0$，$p_1+\cdots+p_n=p$，则

$$f(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}p_ix_i)\leqslant\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i) \tag{5.1.3}$$

在式(5.1.3)中，令 $p_1=p_2=\cdots p_n=\dfrac{1}{n}$，可得

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad (5.1.3)'$$

当 $f(t)$ 为上凸函数时，上诸不等式反向.

式(5.1.3)也称为**凸函数的琴生不等式**.

本章将要用到的重要的下凸函数有

1° $f(t)=-\ln t, t\in(0,+\infty)$

2° $f(t)=t^{\alpha}, \alpha>1, t\in(0,+\infty)$

这由定理 5.1.1 显见，且均为严格下凸函数.

由 $f(t)=-\ln t$ 是 $(0,+\infty)$ 上的下凸函数，及式(5.1.3)′，即得如下的**几何一算术平均值不等式**：

设 $x_i\geqslant 0, p_t>0, 1\leqslant i\leqslant n, p_1+\cdots+p_n=p$，则

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i a_i}{p} \qquad (5.1.4)$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (5.1.4)'$$

二、双随机矩阵与控制不等式

定义 5.1.2 设 $P=(p_{ij})\in R^{n\times n}$，$P$ 的各元素非负，且

$$Pe_n=e_n, P^{\mathrm{T}}e_n=e_n \qquad (5.1.5)$$

这里 $e_n=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in R^{n\times 1}$，即

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}=1, j=1,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1, i=1,\cdots,n\end{aligned}\right\} \qquad (5.1.5)'$$

即矩阵 P 的各列、各行元素之和均为 1，则称 P 为 R 上的**双随机矩阵**，记为 $P\in\mathscr{H}(R)$.

若满足的式(5.1.5)′换成如下的式(5.1.5)″

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\leqslant 1, j=1,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\leqslant 1, i=1,\cdots,n\end{aligned}\right\} \qquad (5.1.5)''$$

则称 P 为 R 上的**次双随机矩阵**,记为 $P\in\mathscr{P}_s(R)$.

定义 5.1.3 设 $P=(p_{ij})\in Q^{n\times n}$,若满足

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |p_{ij}|=1, j=1,2,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}|=1, i=1,2,\cdots,n\end{aligned}\right\} \qquad (5.1.6)$$

则称 P 是 Q 上的**广义双随机矩阵**,记为 $P\in\mathscr{P}(Q)$.

若满足的式(5.1.6)换成如下的(5.1.6)′

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |p_{ij}|\leqslant 1, j=1,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}|\leqslant 1, i=1,\cdots,n\end{aligned}\right\} \qquad (5.1.6)'$$

则称 P 为 Q 上的**广义次双随机矩阵**,记为 $P\in\mathscr{P}_s(Q)$. 易证下面

命题 5.1.1

1° 若 $A\in\mathscr{P}$(或 $A\in\mathscr{P}_s$),则 $A^{\mathrm{T}},\overline{A}\in\mathscr{P}$,(或 $A^{\mathrm{T}},\overline{A}\in\mathscr{P}_s$),且对任意置换矩阵 T,有 $TA,AT\in\mathscr{P}$(或 $TA,AT\in\mathscr{P}_s$).

2° 若 $A,B\in\mathscr{P}_s$,则 $AB,BA\in\mathscr{P}_s$.

定义 5.1.4 设 $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^{1\times n}$满足$x_1\geqslant\cdots\geqslant x_n,y_1\geqslant\cdots\geqslant y_n$,

1° 若 $$\sum_{s=1}^{k} x_s\leqslant\sum_{s=1}^{k} y_s, k=1,\cdots,n \qquad (5.1.7)$$

则称**向量 x 被 y 控制**,或说 **y 弱优于 x**,记为 $x\prec_w y$.

2° 若
$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{k} x_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} y_s, k = 1,\cdots,n-1\\&\sum_{s=1}^{n} x_s = \sum_{s=1}^{n} y_s\end{aligned}\right\} \tag{5.1.8}$$

则称**向量 x 被 y 严控**,或说 **y 优于 x**,记为 $x \prec y$.

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^{1\times n}$,以下均假定向量 x 的分量是按降序 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$ 排好的. 而把以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的乱序排列作成的向量记为 $\tilde{x}$,于是易得如下两个定理:

定理 5.1.3 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^{1\times n}$,则

$$\sum_{s=1}^{n} x_{n-s+1}\leqslant \sum_{s=1}^{k} \tilde{x}_s\leqslant \sum_{s=1}^{k} x_s, k=1,\cdots,n \tag{5.1.9}$$

定理 5.1.4 设 $x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^{1\times n}$,则有

$$\sum_{s=1}^{k} x_s y_{n-s+1}\leqslant \sum_{s=1}^{k} \tilde{x}_s \tilde{y}_s\leqslant \sum_{s=1}^{k} x_s y_s, k=1,\cdots n \tag{5.1.10}$$

为了讨论控制不等式,我们将常用到如下的所谓**阿贝尔**(Abel)**变换**:

设 $a_t,b_t(t=1,\cdots,n)$是实数或四元数,则成立等式

$$\sum_{t=1}^{u} a_t b_t = \sum_{t=1}^{n-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} b_s + a_n \sum_{s=1}^{n} b_s \tag{5.1.11}$$

定理 5.1.5 设 $a_t,b_t,c_t\in R$,若 $a_t\geqslant 0, b_t\geqslant 0, t=1,\cdots,n$, $c_1\geqslant\cdots\geqslant c_n$,且

$$\sum_{t=1}^{k} a_t\leqslant \sum_{t=1}^{k} b_t, k=1,\cdots,n \tag{5.1.12}$$

则有

$$\sum_{t=1}^{k} c_t a_t\leqslant \sum_{t=1}^{k} c_t b_t, k=1,\cdots,n \tag{5.1.13}$$

证 由阿贝尔变换即式(5.1.11)及条件,有

$$\sum_{t=1}^{k} c_t a_t = \sum_{t=1}^{k-1} (c_t - c_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} a_s + c_k \sum_{t=1}^{k} a_t$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{k-1} (c_t - c_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} b_s + c_k \sum_{t=1}^{k} a_t$$

$$= \sum_{t=1}^{k} c_t b_t, k = 1, \cdots, n$$

故式(5.1.13)成立. □

定理 5.1.6 设 $a_t, C_t^{(k)} \in R, 1 \leqslant t, k \leqslant n$, 若 $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$, 且对任意 $1 \leqslant l \leqslant n$, 有 $\sum_{t=1}^{l} C_t^{(k)} \leqslant \min\{l, k\}$, 则

$$\sum_{t=1}^{n} a_t C_t^{(k)} \leqslant \sum_{t=1}^{k} a_t, 1 \leqslant k \leqslant n \tag{5.1.14}$$

证 由阿贝尔变换及条件, 有

$$\sum_{t=1}^{n} a_t C_t^{(k)} = \sum_{t=1}^{n-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{k} C_s^{(k)} + a_n \sum_{s=1}^{n} C_s^{(k)}$$

$$= \sum_{t=1}^{k-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} C_s^{(k)} + \sum_{t=k}^{n-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{n} C_s^{(k)} + a_n \sum_{s=1}^{n} C_s^{(k)}$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{k-1} (a_t - a_{t+1}) t + \sum_{t=k}^{n-1} (a_t - a_{t+1}) k + n a_n$$

$$= \sum_{t=1}^{k-1} (a_t - a_{t+1}) t + a_k \cdot k = \sum_{t=1}^{k} a_t, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

故式(5.1.14)成立. □

定理 5.1.7 设 $a_t, C_t^{(k)} \in R, 1 \leqslant t, k \leqslant n$, 若 $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$, 且

$$\sum_{t=1}^{l} C_t^{(k)} \leqslant \begin{cases} \sum_{t=1}^{l} b_t, 1 \leqslant l \leqslant k-1 \\ \sum_{t=1}^{k} b_t, k \leqslant l \leqslant n \end{cases}$$

则

$$\sum_{t=1}^{n} a_t C_t^{(k)} \leqslant \sum_{t=1}^{k} a_t b_t, 1 \leqslant k \leqslant n \tag{5.1.15}$$

证 由阿贝尔变换及条件，有

$$\sum_{t=1}^{n} a_t C_t^{(k)} = \sum_{t=1}^{n-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} C_s^{(k)} + a_n \sum_{t=1}^{n} C_t^{(k)}$$

$$= \sum_{t=1}^{k-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} C_s^{(k)} + \sum_{t=k}^{n-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} C_s^{(k)} + a_n \sum_{t=1}^{n} C_t^{(k)}$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{k-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} b_s + \sum_{t=k}^{n-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{k} C_t^{(k)} + a_n \sum_{t=1}^{k} b_t$$

$$= \sum_{t=1}^{k-1} (a_t - a_{t+1}) \sum_{s=1}^{t} b_s + a_k \sum_{t=1}^{k} b_t = \sum_{t=1}^{k} a_t b_t$$

故式(5.1.15)成立. □

向量受控与双随机矩阵之间的关系有如下的

定理 5.1.8 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}, y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}} \in R^{n\times 1}$，且非负，则

1° $x \prec y \Leftrightarrow$ 存在双随机阵 $P \in \mathscr{P}(R)$ 使得 $x = Py$；

2° $x \prec_w y \Leftrightarrow$ 存在次双随机阵 $P \in \mathscr{P}_s(R)$，使 $x = Py$.

证 1° 不妨设 x, y 的分量均为降序排好的.

"$\Leftarrow$" 改记 $x = Py$ 为分块形式为

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} \qquad ①$$

这里 $\quad x^{(1)} = (x_1,\cdots,x_k)^{\mathrm{T}}, x^{(2)} = (x_{k+1},\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$

$$y^{(1)} = (y_1,\cdots,y_k)^{\mathrm{T}}, y^{(2)} = (y_{k+1},\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$$

其余是相应分块，记 $e_k = (1,\cdots,1)^{\mathrm{T}} \in R^{k\times 1}$，于是由式①有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} x_i &= e_k^{\mathrm{T}} x^{(1)} = e_k^{\mathrm{T}} (P_{11} y^{(1)} + P_{12} y^{(2)}) \\
&= e_k^{\mathrm{T}} y^{(1)} - e_k^{\mathrm{T}} (I_k - P_{11}) y^{(1)} + e_k^{\mathrm{T}} P_{12} y^{(2)} \\
&\leqslant e_k^{\mathrm{T}} y^{(1)} - e_k^{\mathrm{T}} (I_k - P_{11}) e_k y_k + e_k^{\mathrm{T}} P_{12} e_{n-k} y_k \\
&= e_k^{\mathrm{T}} y^{(1)} - [e_k^{\mathrm{T}} e_k - e_k^{\mathrm{T}} (P_{11}, P_{12}) e_n] y_k
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} y_i - (e_k^{T}e_k - e_k^{T}e_k)y_k$$

$$= \sum_{i=1}^{k} y_i, k = 1, \cdots, n-1$$

且由式(5.1.5),有 $$e_n^{T}x = e_n^{T}Py = e_n^{T}y$$

故得 $$x \prec y$$

"⇒" 对 n 采用数学归纳法.

当 $n=1$, $x \prec y$,即 $x=y$,而 1 正是 1 阶的双随机阵,故当 $n=1$ 时,结论成立.现假设阶数 $\leqslant n-1$ 时结论为真,下面考虑 n 阶情形:

已知 $x \prec y$,可分两种情况:

(i) $x_1 = y_1$,此时,记

$$\tilde{x} = (x_2, \cdots, x_n)^{T}, \tilde{y} = (y_2, \cdots, y_n)^{T}$$

可得 $\tilde{x} \prec \tilde{y}$,由归纳假设,存在双随机阵 $\widetilde{P}$,使 $\tilde{x} = \widetilde{P}\tilde{y}$.取

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{P} \end{pmatrix}$$

显见 P 仍为双随机阵,且有 $x = Py$.

(ii) $x_1 < y_1$.此时必有 y 的某个坐标不大于 x_1(否则控制条件不能成立),设 y_t 是其中的第一个,即有 $x_1 < y_1, y_2, \cdots, y_{t-1}$,但 $y_t \leqslant x_1 < y_1$,后一不等式保证了存在 $\alpha \in [0,1]$,使得

$$x_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha) y_t$$

令

$$P_1 = \left(\begin{array}{ccc:c} \alpha & 0\cdots0 & 1-\alpha & \\ 0 & & 0 & \\ \vdots & I_{t-2} & \vdots & 0 \\ 0 & & 0 & \\ 1-\alpha & 0\cdots0 & \alpha & \\ \hdashline & 0 & & I_{n-t} \end{array}\right)$$

显然 P_1 为双随机阵,记 $P_1y=z=(z_1,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$,则有

$$z_1=\alpha y_1+(1-\alpha)y_t=x_1$$

$$z_t=(1-\alpha)y_1+\alpha y_t=y_t+y_1-x_1 \qquad ②$$

$$z_2=y_2,\cdots,z_{t-1}=y_{t-1},z_{t+1}=y_{t+1},\cdots,z_n=y_n$$

注意到 $z_1=x_1$,记 $\tilde{z}=(z_2,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$,可证 $\tilde{x}\prec\tilde{z}$. 事实上,由式②知:

当 $k\leqslant t-1$ 时,有

$$\sum_{i=2}^{k} z_i=\sum_{i=1}^{k} y_i>\sum_{i=2}^{k} x_1\geqslant\sum_{i=2}^{k} x_i$$

当 $k>t-1$ 时,有

$$\sum_{i=2}^{k} z_i=\sum_{\substack{i\neq t\\ i=1}}^{k} y_i+y_t+y_1-x_1=\sum_{i=1}^{k} y_i-x_1\geqslant\sum_{i=2}^{k} x_i$$

得受控条件满足. 而 $e_{n-1}^{\mathrm{T}}\tilde{z}=e_n^{\mathrm{T}}z-x_1=e_n^{\mathrm{T}}y-x_1=e_n^{\mathrm{T}}x-x_1=e_{n-1}^{\mathrm{T}}\tilde{x}$,得 $\tilde{x}\prec\tilde{z}$,于是仿 1°得,双随机阵 P_2 使 $x=P_2z$,取 $P=P_2P_1$,就有 $x=P_2z=P_2P_1y=Py$,而 P 为双随机阵.

2° 同理可证. □

定理 5.1.9 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$,则 $x\prec_w y$ 的充要条件是存在 $P=(p_{ij})\in\mathscr{P}_s(Q)$,使

$$x=Py$$

特别地,若 $P\in\mathscr{P}(R)$,则对任意 $y\in R^{n\times 1}$ 有 $Py\prec y$.

证 充分性. 设 $x=Py,P\in\mathscr{P}_s(Q)$,则

$$|x_i|=|\sum_{j=1}^{n} p_{ij}y_j|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}||y_j|,i=1,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{k}|x_i|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}||y_j|=\sum_{j=1}^{n}|y_j|\sum_{i=1}^{k}|p_{ij}|$$

$$=\sum_{j=1}^{n}|y_j|t_j \qquad ①$$

其中，$1\leqslant k\leqslant n$，$0\leqslant t_j=\sum_{i=1}^{k}|p_{ij}|\leqslant 1$，$j=1,\cdots,n$，且

$$\sum_{j=1}^{n}t_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}|p_{ij}|=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}|\leqslant\sum_{i=1}^{k}1=k \qquad ②$$

从而由式①，②，有

$$\sum_{i=1}^{k}|x_i|-\sum_{i=1}^{k}|y_i|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|y_i|t_j-\sum_{j=1}^{k}|y_j|$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}|y_j|t_j-\sum_{j=1}^{k}|y_j|+|y_k|(k-\sum_{j=1}^{n}t_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}(|y_i|-|y_k|)(t_j-1)+\sum_{j=k+1}^{n}t_j(|y_j|-|y_k|)\leqslant 0$$

故有 $x\prec_w y$.

当 $P\in\mathscr{P}(R)$时，对 $y\in Q^{n\times 1}$，设 $x=Py=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，与上类似可证 $Py\prec_w y$，且

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}y_i=\sum_{j=1}^{n}y_j\sum_{i=1}^{k}p_{ij}=\sum_{j=1}^{n}y_j$$

从而有 $Py\prec y$.

必要性. 记 $\tilde{x}=(|x_1|^2,\cdots,|x_n|^2)^{\mathrm{T}}$，$\tilde{y}=(|y|^2,\cdots,|y_n|^2)^{\mathrm{T}}$，则由命题 5.1.8 之 1°的必要性知存在 $W\in\mathscr{P}_s(R)$，使

$$\tilde{x}=W\tilde{y}$$

令
$$D_1=\mathrm{diag}(\frac{\bar{x}_1}{|x_1|^2},\cdots,\frac{\bar{x}_n}{|x_n|^2})$$

$$D_2=\mathrm{diag}(\frac{\bar{y}_1}{|y_1|^2},\cdots,\frac{\bar{y}_n}{|y_n|^2})$$

则
$$\tilde{x}=D_1x,\tilde{y}=D_2y$$

易验证：$D_1^{-1}=D_1^*$，$D_2\in\mathscr{R}(Q)\subset\mathscr{P}_s(Q)$.

令 $P=D_1^{-1}WD_2$，则易知有 $P\in\mathscr{P}_s(Q)$，且有

$$x=D_1^{-1}\tilde{x}=D_1^{-1}W\tilde{y}=D_1^{-1}WD_2y=Py \qquad \square$$

定理 5.1.10 设 $x,y\in R^{n\times 1}$，且它们的分量均已按降序排

列，P 是任给的 n 阶双随机阵，则有

$$x^{\mathrm{T}}\underline{y}\leqslant x^{\mathrm{T}}Py\leqslant x^{\mathrm{T}}y \tag{5.1.16}$$

这里，$\underline{y}\triangleq(\underline{y}_1,\cdots,\underline{y}_n)^{\mathrm{T}}$，而 $\underline{y}_t=y_{n-t+1},t=1,\cdots,n$.

证 先证式(5.1.16)右边的不等式，用数学归纳法. 当 $n=1$，结论显然为真. 假设对 $n-1$ 维向量，结论为真，现讨论 n 维情形. 记

$$z=Py=(z_1,\cdots,z_n),\ \tilde{z}=(z_2,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}},$$
$$\tilde{y}=(y_2+y_1-z_1,y_3,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$$

则由 $z\prec y\Rightarrow\tilde{z}\prec\tilde{y}$，故有 $n-1$ 阶双随机阵 $\tilde{P}$ 使 $\tilde{z}=\tilde{P}\tilde{y}$，由归纳假设，可得

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{z}\leqslant\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{y},\text{这里 }\tilde{x}=(x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$$

由于 $x^{\mathrm{T}}z=x_1z_1+\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{z}\leqslant x_1z_1+\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{y}$

而
$$\begin{aligned}x_1z_1+\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{y}&=x_1z_1+x_2(y_1-z_1)-x_1y_1+x^{\mathrm{T}}y\\&=(x_1-x_2)(z_1-y_1)+x^{\mathrm{T}}y\leqslant x^{\mathrm{T}}y\end{aligned}$$

即得 $x^{\mathrm{T}}z\leqslant x^{\mathrm{T}}y$ 即 $x^{\mathrm{T}}Py\leqslant x^{\mathrm{T}}y$.

在已得的结果中用 $-y$ 代替 y，则有

$$x^{\mathrm{T}}P(-y)\leqslant x^{\mathrm{T}}(-y)$$

即得
$$x^{\mathrm{T}}\underline{y}\leqslant x^{\mathrm{T}}Py$$ □

关于凸函数与控制不等式，有如下

定理 5.1.11 设 I 为一区间，$x_s,y_s\in I$，$s=1,\cdots,n$，$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^{1\times n}$，若 $x\prec_w y$，即 $x_1\geqslant\cdots\geqslant x_n$，$y_1\geqslant\cdots\geqslant y_n$，且满足

$$\sum_{s=1}^{k}x_s\leqslant\sum_{s=1}^{k}y_s,k=1,\cdots,n \tag{5.1.17}$$

则对 I 上任一下凸递增函数 $f(t)$，有

$$\sum_{s=1}^{k}f(x_s)\leqslant\sum_{s=1}^{k}f(y_s),k=1,\cdots,n \tag{5.1.18}$$

证 不妨设 $x_s \neq y_s$(因为当 $x_s = y_s$ 时,有 $f(x_s)=f(y_s)$,不等式(5.1.18)中的这一项可以不考虑),对任意正整数 $k \leqslant n$,令

$$D_s=\frac{f(x_s)-f(y_s)}{x_s-y_s}, s=1,\cdots,k \quad ①$$

因 $f(t)$是 I 上的递增下凸函数,注意到 $x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n$, $y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_n$,及式(5.1.10),由式①,有

$$D_s \geqslant D_{s+1} \geqslant 0, s=1,\cdots,k \quad ②$$

令 $$X_s=\sum_{r=1}^{s} x_r, Y_s=\sum_{r=1}^{s} y_r, s=1,\cdots,k,$$

由式(5.1.10)有 $$x_s \leqslant Y_s, s=1,\cdots,k, \quad ③$$

于是由式②,③,有

$$\sum_{s=1}^{k-1}(X_s-Y_s)(D_s-D_{s+1})+(X_k-Y_k)D_k \leqslant 0,$$

即 $$\sum_{s=1}^{k-1} X_s(D_s-D_{s+1})+X_kD_k \leqslant \sum_{s=1}^{k-1} Y_s(D_s-D_{s+1})+Y_kD_k,$$

即 $$\sum_{s=1}^{k}(X_s-X_{s-1})D_s \leqslant \sum_{s=1}^{k}(Y_s-Y_{s-1})D_s$$

(其中 $X_0=0$, $Y_0=0$)

即 $$\sum_{s=1}^{k} x_s \frac{f(x_s)-f(y_s)}{x_s-y_s} \leqslant \sum_{s=1}^{k} y_s \frac{f(x_s)-f(y_s)}{x_s-y_s}$$

即 $$\sum_{s=1}^{k} \frac{x_sf(x_s)-x_sf(y_s)-y_sf(x_s)+y_sf(y_s)}{x_s-y_s} \leqslant 0$$

即 $$\sum_{s=1}^{k}[f(x_s)-f(y_s)] \leqslant 0$$

即 $$\sum_{s=1}^{k} f(x_s) \leqslant \sum_{s=1}^{k} f(y_s), s=1,\cdots,n$$ □

定理 5.1.12 设 $x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$, $y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_n \geqslant 0$,若

$$\prod_{s=1}^{k} x_s \leqslant \prod_{s=1}^{k} y_s, k=1,\cdots,n \tag{5.1.19}$$

则
$$\sum_{s=1}^{k} x_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} y_s, k=1,\cdots,n \tag{5.1.20}$$

证 不妨设 $x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_r > 0, x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$，则

$$y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_r > 0, y_{r+1} \geqslant y_{r+2} \geqslant \cdots \geqslant y_n \geqslant 0, r=1,\cdots,n,$$

令
$$a_s = \ln x_s, b_s = \ln y_s, s=1,\cdots,r,$$

对式(5.1.19)两边取对数，得

$$\sum_{s=1}^{k} a_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} b_s, k=1,\cdots,r \tag*{①}$$

令 $f(t)=e^t$，则 $f(t)$是$(0,+\infty)$上的下凸递增函数，且

$$f(a_s)=x_s, f(b_s)=y_s, s=1,\cdots,r$$

于是由式①及定理 5.1.11 有

$$\sum_{s=1}^{k} x_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} y_s, k=1,\cdots,r \tag*{②}$$

又 $x_{r+1}=\cdots=x_n=0, y_{r+1} \geqslant \cdots \geqslant y_n \geqslant 0,$ ③

从而由式②及式③，即得

$$\sum_{s=1}^{k} x_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} y_s, k=1,\cdots,n.$$

故式(5.1.20)成立. □

定理 5.1.13 设 $x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0, y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_n \geqslant 0$，若

$$\sum_{s=1}^{k} x_s \leqslant \sum_{s=1}^{k} y_s, k=1,\cdots,n$$

则当 $p \geqslant 1$ 时有

$$\sum_{s=1}^{k} x_s^p \leqslant \sum_{s=1}^{k} y_s^p, k=1,\cdots,n \tag{5.1.21}$$

证 令 $f(t)=t^p, t\in[0,+\infty)$，则当 $p>1$ 时，有 $f'(t)=pt^{p-1}>0, f''(t)=p(p-1)t^{p-2}>0, t\in(0,\infty)$，故 $f(t)$是[0,

$+\infty)$上的下凸递增函数,从而由定理 5.1.11 即知式(5.1.21)成立.而当 $p=1$ 时,由条件即知式(5.1.21)成立. □

§5.2 几个数值不等式

本节将给出在讨论四元数矩阵不等式中要常用到的几个数值不等式.

一、贝努利(Bernoulli)不等式

定理 5.2.1 设 $x>-1$,则

1° 当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时,有

$$(1+x)^{\alpha}\geqslant 1+\alpha x \tag{5.2.1}$$

2° 当 $0<\alpha<1$ 时,有

$$(1+x)^{\alpha}\geqslant 1+\alpha x \tag{5.2.2}$$

式(5.2.1)、(5.2.2)中等号当且仅当 $x=0$ 时成立.

证 令 $f(x)=(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x(x>-1)$,则

1° 当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时,有

$$f'(x)=\alpha((1+x)^{\alpha-1}-1)\begin{cases}<0, -1<x<0\\ =0, x=0\\ >0, x>0\end{cases}$$

所以 $f(x)$在$(-1,0]$上严格递减,而在$[0,+\infty)$上严格递增,故 $f(x)$在 $x=0$ 处取最小值 $f(0)=0$,从而 $f(x)\geqslant 0$,且等号仅在 $x=0$ 处成立,因此式(5.2.1)成立.

2° 可同理证之. □

二、杨格(Young)不等式

定理 5.2.2 设 $a_i, p_i>0(i=1,2)$,且 $p_1+p_2=1$,则

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\leqslant p_1a_1+p_2a_2 \tag{5.2.3}$$

其中等号当且仅当 $a_1=a_2$ 时成立.

证 在式(5.2.1)中令 $1+x=\frac{a_1}{a_2}, \alpha=p$,则有

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{p_1}\leqslant 1+p_1\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)=(1-p_1)+p_1\frac{a_1}{a_2}=p_2+p_1\frac{a_1}{a_2}$$

上式两边同乘以 $a_2{}^{p_1+p_2}=a_2$,即得式(5.2.3). □

利用数学归纳法可将式(5.2.3)推广为如下的:

定理 5.2.3 设 $a_i, p_i>0(i=1,\cdots,n)$且 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1$,则

$$\prod_{i=1}^{n} a_i{}^{p_i}\leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \tag{5.2.4}$$

其中等号当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时成立.

证 当 $n=2$ 时,由定理 5.2.3 知成立.现设式(5.2.4)对 $n-1$ 成立,则对 n,由式(5.2.3)及归纳假设,有

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} a_i{}^{p_i} &= a_i{}^{p_1}\left(\prod_{i=2}^{n} a_i{}^{p_i/(1-p_1)}\right)^{1-p_1}\\
&\leqslant p_1a_1+(1-p_1)\prod_{i=2}^{n} a_i{}^{p_i/(1-p_1)}\\
&\leqslant p_1a_1+(1-p_1)\sum_{i=2}^{n}\frac{p_i}{1-p_1}a_i\\
&= p_1a_1+\sum_{i=2}^{n} p_ia_i=\sum_{i=1}^{n} p_ia_i\end{aligned}$$

□

另外,我们指出,当诸 a_i 为非负时,式(5.2.4)亦成立.因为当 a_i 中有一个为零时式(5.2.4)的左边$=0$,而右边$\geqslant 0$,故得如下

定理 5.2.4 设 $a_i\geqslant 0, p_i>0(i=1,\cdots n)$且 $p_1+\cdots+p_n=1$,则

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\leqslant \sum_{i=1}^{n} p_ia_i \tag{5.2.5}$$

又当 $p_1+\cdots+p_n=p<1$ 时,有

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\leqslant 1-p+\sum_{i=1}^{n} p_ia_i \tag{5.2.5$'$}$$

定理 5.2.5 设 $a_i \geqslant 0, p_i > 0 (i=1,\cdots,n)$ 且 $p_1+\cdots+p_n=p$,则

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \leqslant \left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)^p \tag{5.2.6}$$

证 设 $p_i' = \frac{1}{p} p_i (i=1,\cdots,n)$,则 $p_i' > 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} p_i' = 1$,故由定理 5.2.4,有

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i'} \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i' a_i$$

即

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i$$

即

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \leqslant \left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)^p$$

□

定理 5.2.6 设 $a_{ij} \geqslant 0, p_j > 0, i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m$,则

1° 当 $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j} \tag{5.2.7}$$

2° 当 $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=\frac{1}{p}$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leqslant p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j/p} \tag{5.2.7$'$}$$

证 1° 由式(5.2.5),有

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (a_{ij}^{p_j})^{\frac{1}{p_j}}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} a_{ij}^{p_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_j}$$

2° 由 $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=\frac{1}{p}$ 有 $\frac{p}{p_1}+\cdots+\frac{p}{p_m}=1$，于是由式(5.2.7)有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\leqslant\sum_{j=1}^{m}\frac{p}{p_j}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{p_j/p}=p\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{p_j/p}$$ □

三、琴生(Jensen)不等式

定理 5.2.7 设 $a_i\geqslant 0(i=1,\cdots,n)$，$\beta>\alpha>0$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{5.2.8}$$

证 当诸 a_i 全为零时式(5.2.8)取等号成立. 现设诸 a_i 中至少有一个大于零，则

$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{\beta}=M_{\beta}>0$，因诸 $a_i\geqslant 0$，故 $0\leqslant\frac{a_i^{\beta}}{M_{\beta}}\leqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$，

又 $\beta>\alpha>0$，故 $0<\frac{\alpha}{\beta}<1$，于是由指数函数 $a^x(0<a<1)$ 的递减性，有

$$\left(\frac{a_i^{\beta}}{M_{\beta}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\geqslant\frac{a_i^{\beta}}{M_{\beta}}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

因此
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^{\beta}}{M_{\beta}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\beta}}{M_{\beta}}=1$$

从而
$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\geqslant M_{\beta}^{\frac{\alpha}{\beta}}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

于是式(5.2.8)成立. □

推论 设 $a_i\geqslant 0(i=1,\cdots,n)$，$r\in R^{+}$，则

1° 当 $r\geqslant 1$ 时有 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^r\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^r$； (5.2.9)

2° 当 $0<r\leqslant 1$ 时有 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^r\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^r$. (5.2.10)

下面我们给出琴生不等式(5.2.9)、(5.2.10)的一个加强，为此先给出如下

命题 5.2.1 设 $a>b>0, r\geqslant 2$，则

$$a^r-b^r\leqslant(a-b)(a+b)^{r-1} \tag{5.2.11}$$

证 显然 $r=2$ 时，式(5.2.11)取等号成立，下设 $r>2$，令

$$\psi(t)=t^r-(1-t)^r+1-2t, t\in(\frac{1}{2},1) \qquad ①$$

因为 $\psi''(t)=r(r-1)[t^{r-2}-(1-t)^{r-2}]>0, t\in(\frac{1}{2},1)$，又 $\psi(t)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，故 $\psi(t)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上为严格下凸函数，注意到 $\psi(\frac{1}{2})=\psi(1)=0$，因此

$$\psi(t)<0, t\in(\frac{1}{2},1) \qquad ②$$

因 $r>2$，对 $a>b>0$，取 $\beta=a, \alpha=a+b$，则 $\frac{1}{2}<\frac{\beta}{\alpha}<1$，于是在式①中令 $t=\frac{\beta}{\alpha}$，则由式②，有

$$\psi(\frac{\beta}{\alpha})=(\frac{\beta}{\alpha})^r-(\frac{\alpha-\beta}{\alpha})^r+1-2\frac{\beta}{\alpha}<0$$

即
$$\beta^r-(\alpha-\beta)^r=(2\beta-\alpha)\alpha^{r-1}$$
即
$$a^r-b^r=(a-b)(a+b)^{r-1}$$
故式(5.2.11)成立. □

定理 5.2.8(琴生不等式的加强) 设 $a_i\geqslant 0, 1\leqslant i\leqslant n$，则

1° 当 $r\geqslant 2$ 时，有

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i)^r\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^r+(n^r-n)(\prod_{i=1}^{n}a_i)^{\frac{r}{n}} \tag{5.2.12}$$

2° 当 $0<r\leqslant\frac{1}{2}$ 时有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^r\geqslant[\sum_{i=1}^{n}a_i+(n^{\frac{1}{r}}-n)(\prod_{i=1}^{n}a_i)^{\frac{1}{n}}]^r \tag{5.2.13}$$

证 1° 先证当 $r=2$ 或 $n=1,2$ 时,不等式(5.2.12)成立.

当 $r=2$ 时,不妨设 $a_1\cdots a_n=1$. 由几何一算术平均值不等式(5.1.4),有

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2-\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2=2\sum_{i\neq j} a_{ij}$$

$$\geqslant 2C_n^2\cdot(\prod_{i=1}^{n} a_i^{n-1})^{1/C_n^2}=n^2-n$$

故 $n=2$ 时,式(5.2.12)为真,而当 $n=1$ 时,式(5.2.12)显然为真.

当 $n=2$ 时,设 $r>2, a_1>a_2$,令

$$\Psi(x)=[(x+a_2)^r-x^r-a_2^r]/(xa_2)^{r/2}, x\in[a_1,a_2]$$

于是由命题 5.2.1 知,当 $x\in(a_1,a_2)$ 时,有

$$\Psi'(x)=\frac{r}{2}x^{-\frac{r}{2}-1}a_2^{-\frac{r}{2}}[(x-a_2)(x+a_2)^{r-1}-x^r+a_2^r]\leqslant 0$$

故 $\Psi(x)$ 在 $[a_1,a_2]$ 上递减,而 $\Psi(a_2)=2^r-2$,因此

$$\Psi(a_1)\geqslant 2^r-2$$

由此即知当 $n=2$ 时,式(5.1.12)成立.

下面证明,当 $r>2, n>2$ 时,式(5.1.12)亦成立. 不妨设 $a_1\cdot\cdots\cdot a_n=1$,这样证式(5.2.12)即相当于证

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^r-\sum_{i=1}^{n} a_i^r\geqslant n^r-n$$

这等价于证明:在条件

$$a_1\cdot\cdots\cdot a_n=1$$

下,函数 $f(a_1\cdots a_n)=(\sum_{i=1}^{n} a_i)^r-\sum_{i=1}^{n} a_i^r$ 的最小值

$$\min f=n^r-n$$

作辅助函数

$$F(a_1,\cdots,a_n,\lambda)=(\sum_{i=1}^{n} a_i)^r-\sum_{i=1}^{n} a_i^r+\lambda(\prod_{i=1}^{n} a_i-1)$$

令 $$\frac{\partial F}{\partial a_j}=r(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{r-1}-ra_j^{r-1}+\frac{\lambda}{a_j}=0(j=1,\cdots,n)$$

将上式整理,得

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{r-1}(a_j-a_k)=a_j^r-a_k^r$$

其中,$j\neq k$;$j,k=1,\cdots,n$.若有某对 $j,k,a_j\neq a_k$(不妨设 $a_j>a_k$),则由命题5.2.1,有

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{r-1}=\frac{a_j^r-a_k^r}{a_j-a_k}\leqslant(a_j+a_k)^{r-1}$$

这是矛盾,故有

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=1 \quad ①$$

不难算出辅助函数 $F(a_1,\cdots,a_n,\lambda)$在式①和 $\lambda=r(1-n^{r-1})$处的二阶全微分

$$d^2F=r(n^r-n)(da_1^2+\cdots+da_n^2)>0$$

据此知,式①是函数 $f(a_1,\cdots,a_n)$的唯一的极小值点.

最后考察 $a_1\cdots a_n=1$ 的边界情况.注意在 $a_1,\cdots,a_n$ 中至少有一个,如 $a_1\to+\infty$时,则 $f(a_1,\cdots,a_n)\to+\infty$.事实上,对于 $\alpha=r-1\geqslant1$,由琴生不等式(5.2.9),有

$$\begin{aligned}f(a_1,\cdots,a_n)&=(\sum_{i=1}^{n} a_i)^r-\sum_{i=1}^{n} a_i^r\\&=(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} a_i)^\alpha-\sum_{i=1}^{n} a_i^r\\&\geqslant(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha)-\sum_{i=1}^{n} a_i^r\\&=\sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha(a_1+\cdots+a_{k-1}+a_{k+1}+\cdots+a_n)\\&>a_1^\alpha(a_2+\cdots+a_n)\end{aligned}$$

$$\geqslant a_1^q(n-1)(a_2a_3\cdots a_n)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$>(n-1)a_1^{q-\frac{1}{n-1}}\to+\infty(\text{当 } a_1\to+\infty)$$

据以上事实，知函数 $f(a_1,\cdots,a_n)$ 在 $a_1=\cdots=a_n=1$ 处取最小值，这最小值为 n^r-n，且式(5.2.12)取等号，当且仅当 $a_1=\cdots=a_n=1$，故式(5.2.12)成立.

2° 令 $p=\frac{1}{r}$，则由 $0<r\leqslant\frac{1}{2}$ 有 $p\geqslant2$，于是由式(5.2.12)，有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{p}}\right)^p\geqslant\sum_{i=1}^n a_i+(n^p-n)\left(\prod_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{n}}$$

将上式两边同时取 $\frac{1}{p}$ 次方，得

$$\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{p}}\geqslant\left[\sum_{i=1}^n a_i+(n^p-n)\left(\prod_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{n}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

即
$$\sum_{i=1}^n a_i^r\geqslant\left[\sum_{i=1}^n a_i+(n^{\frac{1}{r}}-n)\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}}\right]^r$$

故式(5.2.13)成立. □

四、赫尔德(Hölder)不等式

定理 5.2.9 设 $a_i,b_i>0,i=1,2,\cdots,n,k>0,k\neq1$ 且 $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$，

1° 当 $k>1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^n a_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\tag{5.2.14}$$

2° 当 $k<1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\geqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^n a_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\tag{5.2.15}$$

上两式中等号当且仅当$\frac{a_1^k}{b_1^{k'}}=\frac{a_2^k}{b_2^{k'}}=\cdots=\frac{a_n^k}{b_n^{k'}}$时成立.

证 考虑函数 $f(x)=x^k(x>0,k>1)$,因为 $f''(x)=k(k-1)x^{k-2}$,故当 $x>0,k>1$ 时,函数 $f(x)=x^k$ 在$[0,+\infty)$内为下凸函数,则由凸函数的琴生(Jensen)不等式(5.1.3),有

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\right)^k\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^k}{\sum_{i=1}^{n}p_i} \qquad ①$$

即
$$\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)^k\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)^{k-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^k$$

在上式中令 $p_i=b_i^{\frac{k}{k-1}},x_i=a_i/b_i^{\frac{1}{k-1}}(i=1,\cdots,n)$,则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^k\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\frac{1}{k-1}}\right)^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)$$

上式两边开 k 方并由$\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$,即得式(5.1.14).

由于当 $0<k<1$ 时,$f(x)=x^k$ 为$(0,+\infty)$内的上凸函数,故这时不等式①中的不等式号反向,由此便得式(5.1.15).

由于式①从而式(5.2.14),(5.2.15)的等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$,即

$$x_1^k=x_2^k=\cdots=x_n^k$$

即
$$\frac{a_1^k}{b_1^{k'}}=\frac{a_2^k}{a_2^{k'}}=\cdots=\frac{a_n^k}{a_n^{k'}}$$

时成立. □

不等式(5.2.14)与(5.2.15)称为**赫尔德**(Hölder)不等式.其中不等式(5.2.14)可推广为

定理 5.2.10 设 $a_{ij},\alpha_j\in R,i=1,2,\cdots,n,j=1,2\cdots,m$,则当 $a_{ij}\geqslant0,\alpha_j>0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}\leqslant\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\Big)^{\alpha_j}\tag{5.2.16}$$

证 先设 $a_{ij}>0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$. 令 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}=A_j(1\leqslant j\leqslant m)$,则式(5.2.16)等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\Big(\frac{a_{ij}}{A_j}\Big)^{\alpha_j}\leqslant 1 \qquad ①$$

利用推广的几何—算术平均不等式(5.1.4),得

$$\prod_{j=1}^{m}\Big(\frac{a_{ij}}{A_j}\Big)^{\alpha_j}\leqslant\left(\frac{\alpha_1\dfrac{a_{i1}}{A_1}+\cdots+\alpha_m\dfrac{a_{im}}{A_m}}{\alpha_1+\cdots+\alpha_m}\right)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_m}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j a_{ij}}{A_j}$$

令 $i=1,2,\cdots,n$,将所得的 n 个不等式相加,得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\Big(\frac{a_{ij}}{A_j}\Big)^{\alpha_j}&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j a_{ij}}{A_j}\\&=\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{A_j}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=1\end{aligned}$$

故式①成立,从而式(5.2.16)成立.

当 a_{ij}中有为零时,比如 $a_{nm}=0$,则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}&=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}^{\alpha_1}\cdots a_{im}^{\alpha_m}=\sum_{i=1}^{n-1}a_{i1}^{\alpha_1}\cdots a_{im}^{\alpha_m}\\&\leqslant\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n-1}a_{ij}\Big)^{\alpha_j}\leqslant\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\Big)^{\alpha_j}\end{aligned}$$

故当 $a_{ij}\geqslant 0,\alpha_j>0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m),\alpha_1+\cdots+\alpha_m=1$ 时,式(5.2.16)成立. □

我们再把不等式(5.2.10)推广为

定理 5.2.11 设 $a_{ij},\alpha_j\in n,i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,m$,则

1° 当$a_{ij}\geqslant 0,\alpha_j>0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r\geqslant 1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}\leqslant\prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij})^{\alpha_j} \tag{5.2.17}$$

2° 当$a_{ij}\geqslant 0,\alpha_j>0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$且$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r\leqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}\leqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij})^{\alpha_j} \tag{5.2.18}$$

3° 当$a_{ij}>0,\alpha_1>0,\alpha_2,\cdots,\alpha_m<0$且$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r\leqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}\geqslant\prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij})^{\alpha_j} \tag{5.2.19}$$

4° 当$a_{ij}>0,\alpha_1>0,\alpha_2,\cdots,\alpha_m<0$且$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r\geqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}\geqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij})^{\alpha_j} \tag{5.2.20}$$

5° 当$a_{ij}>0,\alpha_j<0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$且$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r$时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}\geqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij})^{\alpha_j} \tag{5.2.21}$$

证 1° 当$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r=1$时,由定理5.2.10即知式(5.2.17)成立,当$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r>1$时,则

$$\frac{\alpha_1}{r}+\frac{\alpha_2}{r}+\cdots+\frac{\alpha_m}{r}=1$$

于是由定理5.2.10,有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(a_{ij}^{r})^{\alpha_j/r}\leqslant\prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{r})^{\alpha_j/r} \qquad ①$$

因为$r>1$,则由Jensen不等式(5.2.9),有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{r}\right)^{1/r} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \qquad ②$$

于是由式①,②,即得

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij}^{\alpha_j} = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (a_{ij}^{r})^{\alpha_j/r} \leqslant \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^{\alpha_j}$$

故式(5.2.17)成立.

2° 当$\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = r < 1$时,则$(1-r) + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$,其中$1-r>0$,$\alpha_j>0(1\leqslant j\leqslant m)$,故由定理5.2.10,有

$$\sum_{i=1}^{n} 1^{1-r} a_{i1}^{\alpha_1} \cdots a_{im}^{\alpha_m} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{1-r} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\sum_{i=1}^{n} a_{im}\right)^{\alpha_m}$$

由此即得式(5.2.18).

3° 令$\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1}$,$\beta_j = \frac{-\alpha_j}{\alpha_1}(2\leqslant j\leqslant m)$,则$\beta_j>0(1\leqslant j\leqslant m)$,且$\beta_1 + \cdots + \beta_m \geqslant 1$,于是由1°,有

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}^{\alpha_1} \cdots a_{im}^{\alpha_m})^{\beta_1} a_{i2}^{\beta_2} \cdots a_{im}^{\beta_m}$$

即 $$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}^{\alpha_1} \cdots a_{im}^{\alpha_m})^{\frac{1}{\alpha_1}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}\right)^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \cdots \left(\sum_{i=1}^{n} a_{im}\right)^{-\frac{\alpha_m}{\alpha_1}}$$

由此即可推得式(5.2.19).

4° 仿3°的证明,并利用2°即可证得式(5.2.20).

5° 由$\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = r$则$(1-r) + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$,其中$1-r>0$,$\alpha_j<0(1\leqslant j\leqslant m)$,故由3°,有

$$\sum_{i=1}^{n} 1^{1-r} a_{i1}^{\alpha_1} \cdots a_{im}^{\alpha_m} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{1-r} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\sum_{i=1}^{n} a_{im}\right)^{\alpha_m}$$

由此即得式(5.2.21). □

在定理5.2.11中,把$a_{ij}^{\alpha_j}$换成a_{ij},再把$\frac{1}{\alpha_j}$换成α_j,则得

推论1 设$a_{ij}, \alpha_j \in R$, $i=1,\cdots,n$; $j=1,\cdots,m$,则

1° 当$a_{ij}\geqslant 0,\alpha_j>0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$,且$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}\geqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{1/\alpha_j}\qquad(5.2.17)'$$

2° 当$a_{ij}\geqslant 0,\alpha_j>0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$,且$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=r\leqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\leqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{1/\alpha_j}\qquad(5.2.18)'$$

3° 当$a_{ij}>0,\alpha_1>0,\alpha_2,\cdots,\alpha_m<0$,且$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=r\leqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\geqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{1/\alpha_j}\qquad(5.2.19)'$$

4° 当$a_{ij}>0,\alpha_1>0,\alpha_2,\cdots,\alpha_m<0$,且$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=r\leqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\geqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{1/\alpha_j}\qquad(5.2.20)'$$

5° 当$a_{ij}>0,\alpha_j<0,(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$,且$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=r$时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\geqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{1/\alpha_j}\qquad(5.2.21)'$$

在推论 1 中,令 $m=2$ 时,有如下:

推论 2 设 $a_i,b_i\in R,i=1,\cdots,n,p,q\in R$,则

1° 当$a_i,b_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n,p>0,q>0$,且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{1}{q}}\qquad(5.2.22)$$

2° 当$a_i, b_i \geqslant 0, i=1,\cdots,n, p>0, q>0$,且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=r\leqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant n^{1-r}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (5.2.23)$$

3° 当$a_i, b_i > 0, i=1,\cdots,n, pq<0$,且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (5.2.24)$$

4° 当$a_i, b_i > 0, i=1,\cdots,n, pq<0$,且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=r\geqslant 1$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant n^{1-r}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (5.2.25)$$

5° 当$a_i, b_i > 0, i=1,\cdots,n, p<0, q<0$,且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=r$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant n^{1-r}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (5.2.26)$$

在推论 2 之 1° 中,令 $p=q=2$,则得如下**柯西—施瓦兹**(Cauchy-Schwarz)不等式:

推论 3 设 $a_i, b_i \geqslant 0, i=1\cdots n$,则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \qquad (5.2.27)$$

在定理 5.2.11 中,令 $m=1$,可得

推论 4 设 $a_i \in R, i=1,\cdots,n, \alpha \in R$,则

1° 当$a_i \geqslant 0, i=1,\cdots,n, \alpha \geqslant 1$时,有

$$n^{1-\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha} \qquad (5.2.28)$$

2° 当$a_i \geqslant 0, i=1,\cdots,n, 0<\alpha\leqslant 1$时,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} \leqslant n^{1-\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha} \qquad (5.2.29)$$

3° 当$a_i>0, i=1,\cdots,n, \alpha\leqslant 0$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} \geqslant n^{1-\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha} \tag{5.2.30}$$

证 在定理 5.2.11 的 1°,2°,5° 中分别令 $m=1$,即知式(5.2.28)与(5.2.29)的右边不等式及式(5.2.30)成立. 为证式(5.2.28)与(5.2.29)的左边不等式,只须在已证的右边不等式中令代换 $\beta=\frac{1}{\alpha}$ 即可证得. □

注 式(5.2.28)的右端不等式与式(5.2.29)的左端不等式也就是琴生不等式(5.2.9)与(5.2.10).

在定理 5.2.11 中令 $n=2$,并取 $\alpha_1=\cdots=\alpha_m=\alpha$,则可得

推论 5 设 $a_j, b_j\geqslant 0, 1\leqslant j\leqslant m, \alpha>0$,则

1° 当$\alpha\geqslant\frac{1}{m}$时,有

$$\left[\prod_{j=1}^{m}(a_j+b_j)\right]^{\alpha}\geqslant\left(\prod_{j=1}^{m} a_j\right)^{\alpha}+\left(\prod_{j=1}^{m} b_j\right)^{\alpha} \tag{5.2.28$'$}$$

2° 当$0<\alpha\leqslant\frac{1}{m}$时,有

$$\left[\prod_{j=1}^{m}(a_j+b_j)\right]^{\alpha}\geqslant 2^{m\alpha-1}\left[\left(\prod_{j=1}^{m} a_j\right)^{\alpha}+\left(\prod_{j=1}^{m} b_j\right)^{\alpha}\right] \tag{5.2.29$'$}$$

赫尔德(Hörder)不等式亦可推广为:

定理 5.2.12 设 $a_{ij}\geqslant 0, \alpha_j>0, 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m$,则

1° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}\geqslant\frac{1}{r}$时,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij}^{r}\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{\alpha_j}} \tag{5.2.31}$$

2° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}\leqslant\frac{1}{r}$时,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij}^{r}\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{\alpha_j}} \tag{5.2.32}$$

证 1° 由 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}\geqslant\frac{1}{r}$ 有 $\frac{r}{\alpha_1}+\cdots+\frac{r}{\alpha_m}\geqslant 1$，则在式(5.2.17)′中把 a_{ij} 换成 a_{ij}^r，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^r\leqslant\prod_{j=1}^{m}\Big[\sum_{j=1}^{m}(a_i^r)^{\alpha_j/r}\Big]^{r/\alpha_j}$$

由此即知式(5.2.31)成立.

2° 由(5.2.18)′同理可证. □

注 在式(5.2.31)中令 $r=1$，即得式(5.2.17)′，在式(5.2.32)中令 $r=1$，即得式(5.2.18)′. 故，前者是后者的推广.

定理 5.2.13 设 $a_{srt}\geqslant 0,\alpha_t>0,1\leqslant s\leqslant m,1\leqslant r\leqslant k,1\leqslant t\leqslant p,\alpha_1+\cdots+\alpha_p=\alpha$，则

1° 当 $\alpha\geqslant 1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{p}a_{srt}^{\alpha_t}\leqslant\prod_{t=1}^{p}\Big(\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}a_{srt}\Big)^{\alpha_t}\qquad(5.2.33)$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{p}a_{srt}^{\alpha_t}\leqslant(mk)^{1-\alpha}\prod_{t=1}^{p}\Big(\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}a_{srt}\Big)^{\alpha_t}\qquad(5.2.34)$$

定理 5.2.14 设 $a_{srt}\geqslant 0,\alpha_{rt}>0,1\leqslant s\leqslant m,1\leqslant r\leqslant k,1\leqslant t\leqslant p$，且 $\sum_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{p}\alpha_{rt}=\alpha$，则

1° 当 $\alpha\geqslant 1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{p}a_{srt}^{\alpha_{rt}}\leqslant\prod_{t=1}^{k}\prod_{t=1}^{p}\Big(\sum_{s=1}^{m}a_{srt}\Big)^{\alpha_{rt}}\qquad(5.2.35)$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{p}a_{srt}^{\alpha_{rt}}\leqslant m^{1-\alpha}\prod_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{p}\Big(\sum_{s=1}^{m}a_{srt}\Big)^{\alpha_{rt}}\qquad(5.2.36)$$

定理 5.2.13 与定理 5.2.14 可由定理 5.2.11 容易推得.

五、闵可夫斯基(Minkowski)不等式

定理 5.2.15 设 $a_{ij}>0,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n,p\in R$,则

1° 当 $p\geqslant 1$ 时,有

$$\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.2.37}$$

2° 当 $0\neq p\leqslant 1$ 时,有

$$\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\geqslant\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.2.38}$$

证 因为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p}=&\sum_{i=1}^{m}a_{i1}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p-1}\\&+\sum_{i=1}^{m}a_{i2}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p-1}+\cdots\\&+\sum_{i=1}^{m}a_{in}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p-1}\end{aligned} \qquad ①$$

而由 Hölder 不等式(5.2.14),有

$$\sum_{i=1}^{m}a_{i1}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i1}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{(p-1)p'}\right]^{\frac{1}{p'}}$$

……

$$\sum_{i=1}^{m}a_{in}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_{in}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{(p-1)p'}\right]^{\frac{1}{p'}}$$

(其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$) 将上 n 个不等式相加,并由式①,则得

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{p}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{(p-1)p'}\right]^{\frac{1}{p'}}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

上式两边同除以 $\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{(p-1)p'}\right]^{\frac{1}{p'}}$, 并注意到 $1-\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}$,即得式(5.2.37).

类似地可证式(5.2.38). □

六、康托洛维奇(Kantorovic)不等式

定理 5.2.16 设 $a_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n} a_i=1$，又 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right)\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\tag{5.2.39}$$

证 对于二次函数 $f(x)=Ax^2-2Bx+C(A>0)$，若有 $f(x_0)\leqslant 0$，则函数所对应的抛物线与 x 轴必有交点，也就是 $B^2-AC\geqslant 0$，现考虑二次函数

$$f(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right)x^2-\frac{\lambda_1+\lambda_n}{\sqrt{\alpha_1\lambda_n}}x+\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i$$

取 $x_0=\sqrt{\lambda_1\lambda_n}$，代入 $f(x)$，经计算可得

$$f(x_0)=\sum_{i=2}^{n-1}a_i\frac{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_n)}{\lambda_i}$$

又因为 $a_i>0,\lambda_i>0$，及 $\lambda_i\geqslant\lambda_1,\lambda_i\leqslant\lambda_n,i=1,2,\cdots,n$，所以

$$a_i\frac{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_n)}{\lambda_i}\leqslant 0(i=1,\cdots,n)$$

于是 $f(x_0)\leqslant 0$，从而式(5.2.39)成立. □

定理 5.2.17 设 $0<m_1\leqslant a_i\leqslant M_1,0<m_2\leqslant b_i\leqslant M_2,i=1,\cdots,n,\alpha>0$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\alpha}\right)$$
$$\leqslant\frac{1}{4}\left[\left(\frac{M_1M_2}{m_1m_2}\right)^{\frac{\alpha}{4}}+\left(\frac{m_1m_2}{M_1M_2}\right)^{\frac{\alpha}{4}}\right]^2\left[\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)^{\frac{\alpha}{2}}\right]^2\tag{5.2.40}$$

证 因为

$$\left(\frac{a_1^{\frac{\alpha}{2}}}{b_1^{\frac{\alpha}{2}}}-\frac{m_1^{\frac{\alpha}{2}}}{M_2^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\left(\frac{b_1^{\frac{\alpha}{2}}}{a_1^{\frac{\alpha}{2}}}-\frac{m_2^{\frac{\alpha}{2}}}{M_1^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\geqslant 0$$

......

$$\left(\frac{a_n^{\frac{\alpha}{2}}}{b_n^{\frac{\alpha}{2}}}-\frac{m_1^{\frac{\alpha}{2}}}{M_2^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\left(\frac{b_n^{\frac{\alpha}{2}}}{a_n^{\frac{\alpha}{2}}}-\frac{m_2^{\frac{\alpha}{2}}}{M_1^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\geqslant 0$$

上 n 个不等式相加,得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^{\frac{\alpha}{2}}}{b_i^{\frac{\alpha}{2}}}-\frac{m_1^{\frac{\alpha}{2}}}{M_2^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\left(\frac{b_i^{\frac{\alpha}{2}}}{a_i^{\frac{\alpha}{2}}}-\frac{m_1^{\frac{\alpha}{2}}}{M_1^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\geqslant 0$$

由此即可导出式(5.2.40). □

注 不等式(5.2.40)称为 **Po´lya-Szeqo 不等式**.

七、切比雷夫(Чебыщев)不等式

定理 5.2.18 设 $a_1\geqslant\cdots\geqslant a_n, b_1\geqslant\cdots\geqslant b_n$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\leqslant n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \qquad (5.2.41)$$

证 因为

$$n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i-\sum_{i=1}^{n} a_i\sum_{i=1}^{n} b_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-a_{ij})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_i+a_jb_j-a_ib_j-a_jb_i)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqslant 0$$

由此即知式(5.2.41)成立. □

定理 5.2.19 设 $a_{ij}\geqslant 0, i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m$,且 $a_{1j}\geqslant a_{2j}\geqslant\cdots\geqslant a_{nj}(1\leqslant j\leqslant m)$,则

$$\prod_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\leqslant n^{m-1}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij} \qquad (5.2.42)$$

证 对 m 采用归纳法.

当 $m=2$ 时,由定理 5.2.18,即知结论成立.现假设式(5.2.42)对 $m-1$ 成立,则对 m,有

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}&=\Big(\prod_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{im}\Big)\\&\leqslant n^{m-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m-1}a_{ij}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{im}\Big)\\&\leqslant n^{m-2}\cdot n\sum_{i=1}^{n}\Big(\prod_{j=1}^{m-1}a_{ij}\Big)a_{im}\\&=n^{m-1}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\end{aligned}$$

这就用数学归纳法证明了不等式(5.2.42)成立. □

注 不等式(5.2.42)是切比雷夫不等式(5.2.41)的推广.

八、幂平均不等式

命题 5.2.2 设 $a_i\geqslant 0, i=1,\cdots,n, f(x)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^x\right)^{\frac{1}{x}}$,则

1° $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的递增函数;

2° $$\lim_{x\to+0}f(x)=\Big(\prod_{i=1}^{n}a_i\Big)^{\frac{1}{n}};\tag{5.2.43}$$

3° $$\lim_{x\to\infty}f(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}.\tag{5.2.44}$$

证 1° 首先考察函数 $g(t)=t\ln t, t\in(0,+\infty)$. 由 $\lim\limits_{t\to+0}g(t)=0$,故补充定义 $g(0)=0$,则 $g(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 因 $g''(t)=\frac{1}{t}>0\,(t\in(0,+\infty))$,故 $g(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的下凸函数,由凸函数的琴生不等式(5.1.3)可得

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}t_i\Big)\ln\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}t_i\ln t_i \qquad ①$$

容易算得

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x^2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^x}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^x\ln a_i^x-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^x\right)\cdot\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^x\right)\right] \qquad ②$$

在式①中令 $t_i=a_i^x$，则由式①、②即知有 $f'(x)\geqslant 0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

2° 当 a_i 全为零时，式(5.2.43)显然成立，故不妨设 a_i 不全为零，因为

$$\lim_{x\to+0}\ln f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^x-\ln n}{x} \qquad ③$$

当 a_i 有 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 个为零时，$\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^x-\ln n\right)$ 为一负数，从而有 $\lim\limits_{x\to+0}\ln f(x)=-\infty$，于是 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0=\left(\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}$，即式(5.2.43)成立；当 $a_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$ 时，由式③及洛必达法则，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}\ln f(x)&=\lim_{x\to+0}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^x\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^x\ln a_i\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\left(\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}$.

3° 当诸 a_i 全为零时，式(5.2.44)显然成立，当诸 a_i 不全为零时，不妨设 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}=a_1$，且诸 a_i 中有 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个等于 a_1，则

$$\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^x\right)^{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln n}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln a_1 \left[1 + \sum_{i=2}^{n} (\frac{a_i}{a_1})^x\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln a_1 + \lim_{x \to +\infty} \ln \left[1 + \sum_{i=1}^{n} (\frac{a_i}{a_1})^x\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$= \ln a_1 + \ln k^0 = \ln a_1$$

故 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{a_i\}$. □

由命题 5.2.2 可得如下幂平均不等式.

定理 5.2.20 设 $a_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, n, k \in N$,则

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{a_i\} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \cdots \leqslant (\frac{\sqrt[k]{a_1} + \cdots + \sqrt[k]{a_n}}{n})^k$$

$$\leqslant \cdots \leqslant (\frac{\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n}}{n})^2 \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \leqslant \cdots \leqslant \sqrt[k]{\frac{a_1^k + \cdots + a_n^k}{n}} \leqslant \cdots$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{a_i\} \tag{5.2.45}$$

九、微微对偶不等式

定义 5.2.1 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times m}$,若诸 $a_{ij} \geqslant 0$,且每行元素都是升序的:

$$\begin{array}{l} 0 \leqslant a_{11} \leqslant \cdots \leqslant a_{1m} \\ 0 \leqslant a_{21} \leqslant \cdots \leqslant a_{2m} \\ \cdots\cdots \\ 0 \leqslant a_{n1} \leqslant \cdots \leqslant a_{nm} \end{array} \tag{5.2.46}$$

则称矩阵 A 为**同序矩阵**.若矩阵 A'的元素全由 A 的元素组成,且元素所在的行数不变,只是大小顺序不一定都是升序的,即式(5.2.46)不全成立,则称 A'为 A 的**乱序矩阵**;若 A 经过交换列的初等变换可化为同序矩阵,则称 A 为**可同序矩阵**;若 $A \in R^{2 \times n}$,

且 A 的第一行元素是升(降)序的,而第二行元素是降(升)序的,则称 A 为**全反序矩阵**;若 $A\in R^{2\times n}$,且 A 可通过列交换的初等变换可化为全反序矩阵,则称 A 为**可全反序矩阵**.

定义 5.2.2 设 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times m}$,记

$$S(A)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}$$

$$T(A)=\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}$$

则分别称 $S(A)$与 $T(A)$为矩阵 A 的**列积和与列和积**.

微微对偶不等式是指如下定理,它首先由张运畴教授于 1980 年提出.

定理 5.2.21 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times m}$是同序矩阵,$a_{ij}\geqslant 0$, $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots,m$. $A'=(a_{ij}')$是 A 的乱序矩阵,则

$$S(A')\leqslant S(A) \tag{5.2.47}$$

$$T(A')\geqslant T(A) \tag{5.2.48}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij}'\leqslant\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_{ij} \tag{5.2.47$'$}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}'\geqslant\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij} \tag{5.2.48$'$}$$

证 1° 若乱序矩阵A'是A 的可同序矩阵,则显然式(5.2.47)与(5.4.48)取等号成立.

2° 若A'不是A 的可同序矩阵,则可不妨设 A'中存在两列 i,j $(i<j)$和 $t(1\leqslant t\leqslant m)$,使得

$$a_{ki}'>a_{kj}',k=1,\cdots,t \quad ①$$

$$a_{ki}'\leqslant a_{kj}',k=t,t+1,\cdots,n \quad ②$$

则 A'可经过改造把A'变化为$A''=(a_{ij}'')$,满足

$$a_{ki}''=a'_{kj}<a_{ki}'=a_{kj}'',k=1,\cdots,t \quad ③$$

其余 $$a''_{st}=a'_{st}$$ ④

现在令

$$a=a''_{1j}a''_{2j}\cdots a''_{tj},\quad b=a''_{1i}a''_{2i}\cdots a''_{ti}$$

$$c=a''_{t+1,i}a''_{t+3,i}\cdots a''_{mi},\quad d=a''_{t+1,j}a''_{t+2,j}\cdots a''_{nj}$$

则由式①,②,③,④,知有

$$a>b,c\leqslant d.$$

从而

$$\begin{aligned}S(A'')-S(A')&=(ad+bc)-(ac+bd)\\&=(a-b)(d-c)\geqslant 0\end{aligned}$$

即 $$S(A)\leqslant S(A'')$$

再令

$$x=a''_{1j}+a''_{2j}+\cdots+a''_{tj},y=a''_{1i}+a''_{2i}\cdots a''_{ti}$$

$$z=a''_{t+1,i}+a''_{t+2,i}+\cdots+a''_{ni},w=a''_{t+1,j}+a''_{t+2,j}+\cdots+a''_{nj}$$

则由式①,②,③,④,知有

$$x>y,z\leqslant w.$$

从而

$$\begin{aligned}&T(A'')-T(A')\\&=[(x+w)(y+z)-(x+z)(y+w)]\prod_{\substack{r=1\\i\neq r\neq j}}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a'_{kr}\right)\\&=(x+y)(z-w)\prod_{\substack{r=1\\i\neq r\neq j}}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a'_{kr}\right)\leqslant 0\end{aligned}$$

故 $T(A')\geqslant T(A'')$.

如果 A''仍是乱序矩阵,可继续按上述方法改造 A'',…,经过有限次(p 次),必可把 A'改造到同序矩阵A,得

$$S(A')\leqslant S(A'')\leqslant\cdots\leqslant S(A^{(p)})=S(A)$$

$$T(A')\geqslant T(A'')\geqslant\cdots\geqslant T(A^{(p)})=T(A)$$

综合 1°,2°即知命题成立. □

§5.3 四元数矩阵特征值的不等式

本节主要讨论四元数矩阵特征值的不等式，且主要是自共轭四元数矩阵的特征值的不等式，为此，我们先引入有关概念及性质.

由定理 4.1.14 知，若 $A\in SC_n(Q)$，$A\geqslant 0$，则必存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$A=U^*\mathrm{diag}(\lambda_1(A)\cdots,\lambda_n(A))U \tag{5.3.1}$$

其中 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$ 是 A 的 n 个特征值. 分解式(5.3.1)称为 A 的谱分解式

定义 5.3.1 设 $A\in SC_n(Q)$，$A\geqslant 0$，$\alpha\in R^+$（或 $A>0$，$\alpha\in R$），A 的谱分解式为式(5.3.1)，则称矩阵 $U^*\mathrm{diag}(\lambda_1{}^\alpha,\cdots,\lambda_n{}^\alpha)U$ 为矩阵 A 的 α 次方，记为 A^α，即有

$$A^\alpha=U^*\mathrm{diag}(\lambda_1^\alpha(A),\cdots,\lambda_n^\alpha(A))U \tag{5.3.2}$$

为了说明定义 5.1.1 的合理性，我们还需证明，对 $A\in SC_n(Q)$，$A\geqslant 0$，$\alpha\in R^+$（或 $A>0$，$\alpha\in R$），上述定义的 α 次方 A^α 是唯一确定的.

为简单计，我们把 $\lambda_s(A)$ 简记为 $\lambda_s(s=1,\cdots,n)$，现假设还存在 $U_1\in U^{n\times n}$，也使得

$$A=U_1{}^*\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)U_1$$

则由上式与式(5.3.1)，并注意到 $U^*=U^{-1}$，则有

$$U_1{}^*\mathrm{diag}(\lambda,\cdots,\lambda_n)U_1=U^*\mathrm{diag}(\lambda,\cdots,\lambda_n)U$$

即
$$\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)U_1U^{-1}=U_1U^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

令 $U_1U^{-1}=P=(p_{ij})$，比较上式两端，得

$$p_{ij}\lambda_i=p_{ij}\lambda_j,\ p_{ij}\in Q,\ i,j=1,\cdots,n$$

当 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 时，由上式有 $p_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)=0$，故 $p_{ij}=0$，从而 $p_{ij}\lambda_i^\alpha$

$= p_{ij}\lambda_j{}^{\alpha}$，当 $\lambda_i = \lambda_j$ 时，显然有 $p_{ij}\lambda_i{}^{\alpha} = p_{ij}\lambda_i{}^{\alpha}$，因此有

$$\mathrm{diag}(\lambda_1{}^{\alpha},\cdots,\lambda_n{}^{\alpha})U_1U^{-1} = U_1U^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1{}^{\alpha},\cdots,\lambda_n{}^{\alpha})$$

从而有

$$U_1{}^*\mathrm{diag}(\lambda_1^{\alpha},\cdots,\lambda_n^{\alpha})U_1 = U^*\mathrm{diag}(\lambda_1^{\alpha},\cdots,\lambda_n^{\alpha})U$$

这就证明了上述定义与 U 的选择无关，并且是具有确定意义的，而且不难验证，对 $A\in SC_n(Q)$，当 $A\geqslant 0$，$\alpha = n$（n 为正整数）时，上述定义的 $A^{\alpha} = A^n$ 就是通常意义下的半正定矩阵 A 的 n 次方；当 $\alpha = \dfrac{1}{n}$ 时，$A^{\alpha} = A^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A}$ 就是通常意义下的半正定矩阵 A 的 n 次方根；当 $A>0$，$\alpha = -1$ 时，上述定义的 $A^{\alpha} = A^{-1}$ 就是正定矩阵 A 的逆矩阵.

由定义 5.3.1 可得如下

命题 5.3.1 设 $A\in SC_n(Q)$

1° 若 $A\geqslant 0$，$\alpha\in R^+$，则 $A^{\alpha}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$；

2° 若 $A>0$，$\alpha\in R$，则 $A^{\alpha}\in SC_n^{>}(Q)$，特别有

$$A^{-1}\in SC_n^{>}(Q);$$

3° 若 $A\geqslant 0$，$\alpha\in R^+$，且 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots,\geqslant\lambda_n(A)\geqslant 0$ 时，则

$$\lambda_s(A^{\alpha}) = \lambda_s^{\alpha}(A),\ s = 1,\cdots,h;$$

4° 若 $A>0$，$\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)>0$，则当 $\alpha\geqslant 0$ 时，有

$$\lambda_s(A^{\alpha}) = \lambda_s^{\alpha}(A),\ s = 1,\cdots,n;$$

5° 若 $A\geqslant 0$，$\alpha,\beta\in R^+$，（或 $A>0$，$\alpha,\beta\in R$），则

$$(A^{\alpha})^{\beta} = A^{\alpha\beta},\ A^{\alpha}A^{\beta} = A^{\alpha+\beta};$$

6° 若 $A\geqslant 0$，$f(x)$ 是实系数多项式，则 $f(A)\in SC_n(Q)$，且

$$\lambda_s(f(A)) = f(\lambda_s),\ s = 1,\cdots,n.$$

定义 5.3.2 设 $A\in SC_n(Q)$，记

$$\varphi_A(\alpha) = \frac{\alpha^*A\alpha}{\alpha^*\alpha},\ 0\neq\alpha\in Q^{n\times 1} \tag{5.3.3}$$

它是 $Q^n\setminus\{0\}$ 到 R 的映射，叫做 A 的 **Rayleigh 商**.

定理 5.3.1 设 $A\in SC_n(Q)$，$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 是 A 的特征值，则

$$\lambda_n\leqslant\varphi_A(\alpha)\leqslant\lambda_1,\ \forall\,0\neq\alpha\in Q^{n\times 1}\tag{5.3.4}$$

$$\lambda_1=\max_{\alpha\neq 0}\varphi_A(\alpha),\ \ \lambda_n=\min_{\alpha\neq 0}\varphi_A(\alpha)\tag{5.3.5}$$

证 由 $A\in SC_n(Q)$ 及定理 4.1.14 知，存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*AU=\text{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

设 $U=(u_1,\cdots,u_n)$，则由 U 可逆知，U 的 n 个列向量 $u_1,\cdots,u_n$ 右线性无关，于是对于 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\in Q^{n\times 1}$，有 $\alpha=ux\neq 0$，注意到诸 $\lambda_t\in R$，则有

$$\alpha^*A\alpha=x^*\text{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)x=\sum_{t=1}^n\lambda_t\bar{x}_txt$$

又
$$\alpha^*\alpha=x^*x=\sum_{t=1}^n\bar{x}_tx_t>0$$

故有

$$\varphi_A(\alpha)=\frac{A^*A\alpha}{A^*\alpha}=\frac{\sum\limits_{t=1}^n\lambda_t\bar{x}_tx_t}{\sum\limits_{t=1}^n\bar{x}_tx_t}$$

注意到 $\lambda_n\leqslant\lambda_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_1$，故由上式有

$$\lambda_n\leqslant\varphi_A(\alpha)\leqslant\lambda_1$$

又如取 $\alpha=u_1$，则 $\varphi_A(u_n)=\lambda_n$，故 $\lambda_1=\min\limits_{\alpha\neq 0}\varphi_A(\alpha)$.

同理取 $\alpha=u_n$，则 $\varphi_A(u_n)=\lambda_n$，故 $\lambda_n=\min\limits_{\alpha\neq 0}\varphi_A(\alpha)$ □

定理 5.3.2 设 $A\in SC_n(Q)$，$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为 A 的特征值，若 $\tilde{S}=\{S\mid S$ 是 Q^n 的子空间，$\dim S=t\}$，$\tilde{T}=\{T\mid T$ 是 Q^n 的子空间，$\dim T=n-t+1\}$，$1\leqslant t\leqslant n$，则

$$\lambda_t=\max_{S\in\tilde{S}}\{\min_{0\neq\alpha\in S}\varphi_A(\alpha)\},\ t=1,\cdots,n\tag{5.3.6}$$

且 $$\lambda_t=\min_{T\in\tilde{T}}\{\max_{0\neq\alpha\in T}\varphi_A(\alpha)\},t=1,\cdots,n \tag{5.3.7}$$

证 因 $A\in SC_n(Q)$,则存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^*AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

令 $U=(a_1,\cdots,a_n),U_1=(a_1,\cdots,a_{t-1}),U_2=(a_t,\cdots,a_n)$,则 $Q^n=R_r(U_1)\oplus R_r(U_2)$,($R_r(U_1)$表示由 U_1 的列向量所生成的子空间),设 S 是 Q^n 的任意 t 维子空间,则 $\dim S>\dim R_r(U_1)$,从而由文献[1]284 页定理 6 知 $\dim(S\cap R_r(U_2))\geqslant 1$,因此,有$0\neq a_0\in S\cap R_r(U_2)$,且可设 $a_0=U_1B$,其中 $0\neq\beta^{\mathrm{T}}=(b_t,\cdots,b_n),b_m\in Q,t\leqslant m\leqslant n$.再注意到诸 $\lambda_m\in R$,并注意到它们的大小顺序,则有

$$\varphi_A(a_0)=\frac{\sum_{m=t}^{n}\lambda_m\bar{b}_m b_m}{\sum_{m=t}^{n}\bar{b}_m b_m}\leqslant\frac{\lambda_t\sum_{m=t}^{n}\bar{b}_m b_m}{\sum_{m=t}^{n}\bar{b}_m b_m}=\lambda_t$$

故$\min\limits_{0\neq a\in S}\varphi_A(a)\leqslant\lambda_t$,其中 $S\in\tilde{S}$,即 S 是Q^n 中的任意t 维子空间,又取 Q^n 的t 维子空间$S_0=<a_1,\cdots,a_t>$,则 $\varphi_A(a_t)=\lambda_t$,且对于任意 $\gamma=(a_1,\cdots,a_t)\delta\in S_0$,其中 $0\neq\delta\in Q^t$,如前推导有,$\varphi_A(\gamma)\geqslant\lambda_t$,故 $\lambda_t=\min\limits_{0\neq\alpha\in S_0}\varphi_A(\alpha)$,所以 $\lambda_t=\max\limits_{S\in\tilde{S}}\{\min\limits_{0\neq\alpha\in S}\varphi_A(\alpha)\}$.

最后设 $B=-A$,B 的特征值为$\mu_1\geqslant\cdots\geqslant\mu_n$,则易见 $\lambda_t=-\mu_{n+t+1}$,于是由上面结果,得

$$\begin{aligned}\lambda_t&=-\mu_{n-t+1}=-\max_{S\in\tilde{S}}\{\min_{0\neq\alpha\in S}\varphi_B(\alpha)\}\\&\leqslant-\max_{T\in\tilde{T}}\{\min_{0\neq\alpha\in T}(-\varphi_A(\alpha))\}\\&=-\max_{T\in\tilde{T}}\{-\max_{0\neq\alpha\in T}\varphi_A(\alpha)\}\\&=\min_{T\in\tilde{T}}\{\max_{0\neq\alpha\in T}\varphi_A(\alpha)\}\end{aligned}$$

□

定理 5.3.3 设 $M\in SC_n(Q)$,A 是M 的任一$m(\leqslant n)$阶主

子阵,它们的特征值分别为 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n, u_1\geqslant\cdots\geqslant u_m$,则

$$\lambda_t\geqslant u_t\geqslant\lambda_{t+(n-m)}, t=1,\cdots,m \tag{5.3.8}$$

特别地,当 $m=n-1$ 时,它们交错排列为

$$\lambda_t\geqslant u_1\geqslant\lambda_2\geqslant u_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{n-1}\geqslant u_{n-1}\geqslant\lambda_n \tag{5.3.9}$$

证 首先,显然有置换矩阵 P,使 A 位于 P^*MP 的左上角,而 P^*MP 与 M 有相同的特征值(因为置换矩阵 $P\in U^{n\times n}$,而由定理 4.3.9 知两相似变换不改变自共轭的特征值),故可不妨设

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$$

命
$$W=\left\{\begin{pmatrix}\beta\\0\end{pmatrix}\middle|\ \beta\in Q^m\right\}\subseteq Q^n$$

因为

$$\varphi_m\left(\begin{pmatrix}\beta\\0\end{pmatrix}\right)=\frac{(\beta^*,0)\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\0\end{pmatrix}}{(\beta^*,0)\begin{pmatrix}\beta\\0\end{pmatrix}}=\frac{\beta^*AB}{\beta^*\beta}$$

$$=\varphi_A(\beta),\ \forall\, 0\neq\beta\in Q^m$$

记 $\tilde{S}=\{S\subseteq Q^n\mid \dim S=t\}, \tilde{S}_0=\{T\subseteq Q^m\mid \dim T=t\}$

则由定理 5.3.2,即得

$$\lambda_t=\max_{S\in\tilde{S}}\{\min_{0\neq\alpha\in S}\varphi_m(\alpha)\}$$
$$\geqslant\max_{T\in\tilde{S}_0}\{\min_{0\neq\beta\in T}\varphi_A(\beta)\}=u_t$$

$$\lambda_{t+(n-m)}=\min_{S\in\tilde{S}}\{\min_{0\neq\alpha\in S}\varphi_m(\alpha)\}$$
$$\leqslant\min_{T\in\tilde{S}_0}\{\max_{0\neq\beta\in T}\varphi_A(\beta)\}=u_t$$ □

不等式(5.3.8)、(5.3.9)称为自共轭矩阵特征值的**交错公式**或 **Poincare 特征值分离定理**.

定理 5.3.4 设 $A=(a_{ij})\in SC_n(Q)$的特征值 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$,

则

$$\lambda_1 \geqslant a_{ss} \geqslant \lambda_n, s=1,\cdots,n \tag{5.3.10}$$

证 因为 a_{ss} 是 A 的一阶主子阵,故在式(5.3.8)中令 $m=1$,即得式(5.3.10). □

关于自共轭矩阵之和的特征值,我们有如下不等式:

定理 5.3.5 设 $A, B \in SC_n(Q)$,则

$$\lambda_t(A)+\lambda_n(B) \leqslant \lambda_t(A+B) \leqslant \lambda_t(A)+\lambda_t(B), t=1,\cdots,n \tag{5.3.11}$$

证 对任意 $0 \neq \alpha \in Q^n$,有

$$\varphi_A(\alpha)+\min_{\alpha \neq 0} \varphi_B(\alpha) \leqslant \varphi_{A+B}(\alpha) \leqslant \varphi_A(\alpha)+\max_{\alpha \neq 0} \varphi_B(\alpha)$$

于是由式(5.3.5),有

$$\varphi_A(x)+\lambda_n(B) \leqslant \varphi_{A+B}(\alpha) \leqslant \varphi_A(\alpha)+\lambda_1(B)$$

从而有

$$\min_{T \in \mathcal{T}}\{\max_{0 \neq \alpha \in T} \varphi_A(\alpha)\}+\lambda_n(\beta)$$

$$\leqslant \min_{T \in \mathcal{T}}\{\max_{0 \neq \alpha \in T} \varphi_{A+B}(\alpha)\}$$

$$\leqslant \min_{T \in \mathcal{T}}\{\max_{0 \neq \alpha \in T} \varphi_A(\alpha)\}+\lambda_1(B)$$

因此由定理 5.3.2,即式(5.3.6)即知式(5.3.11)成立. □

定理 5.3.6 设 $A \in SC_n(Q)$, $U_k \in U^{n \times k}$(即 $U_k^* U_k = I_k$), $k \leqslant n$, $\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A)$, $\lambda_1(U_k^* A U_k) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k(U_k^* A U_k)$,则

$$\lambda_t(A) \geqslant \lambda_t(U_k^* A U_k) \geqslant \lambda_{n-k+t}(A), 1 \leqslant t \leqslant k \tag{5.3.12}$$

证 由命题 4.2.3 知可将 U_k 扩充为 $U=(U_k, U_{n-k}) \in U^{n \times n}$,因为 $\lambda_t(A)=\lambda_t(U^* AU)$,且 $U_k^* AU_k$ 为 $U^* AU$ 的 k 阶顺序主子阵,故由定理 4.3.9 及式(5.3.8),有

$$\lambda_{n-k+t}(A)=\lambda_{n-k+t}(U^* AU)$$

$$\leqslant \lambda_t(U_k^* AU_k) \leqslant \lambda_t(U^* AU)$$

$$= \lambda_t(A), 1 \leqslant t \leqslant n$$

即(5.3.12)式成立. □

命题 5.3.2 设 $A \in SC_n(Q)$, $U \in U^{k\times n}$

$$1^\circ \max_{UU^* = I_k} \operatorname{tr}(UAU^*) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A), k = 1, \cdots, n \quad (5.3.13)$$

$$2^\circ \min_{UU^* = I_k} \operatorname{tr}(UAU^*) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_{n-s+1}(A), k = 1, \cdots, n \quad (5.3.14)$$

证 由命题 4.2.3 知,对于满足 $UU^* = I_k$ 的 $U \in U^{k\times n}$,必存在 $V \in U^{(n-k)\times n}$,使 $\widetilde{U} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in U^{n\times n}$,因为

$$\widetilde{U}A\widetilde{U}^* = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} A(U^*, V^*) = \begin{pmatrix} UAU^* & UAV^* \\ VAU^* & VAV^* \end{pmatrix}$$

由定理 4.1.17 知

$$\lambda_s(\widetilde{U}A\widetilde{U}^*) = \lambda_s(A), s = 1, \cdots, n$$

注意到 UAU^* 是 $\widetilde{U}A\widetilde{U}^*$ 的主子阵,则由定理 5.2.3 知

$$\lambda_s(UAU^*) \leqslant \lambda_s(\widetilde{U}A\widetilde{U}^*), s = 1, \cdots, k$$

因此 $$\operatorname{tr}(UAU^*) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(UAU^*) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A), 1 \leqslant k \leqslant n \quad ①$$

其次,对 $A \in SC_n(Q)$,由定理 4.1.14 知,存在 $T \in U^{n\times n}$,使

$$TAT^* = \operatorname{diag}(\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A))$$

令 $$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}, T_1 \in U^{k\times n},$$

则有

$$T_1AT_1^* = \operatorname{diag}(\lambda_1(A), \cdots, \lambda_k(A)), \text{且 } T_1T_1^* = I_k$$

此时有 $$\operatorname{tr}(T_1AT_1^*) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)$$

由此即知式①中等号成立,从而即知式(5.3.13)成立.

同理可证式(5.3.14). □

定理 5.3.7 设 $A,B\in SC_n(Q)$,则

$$\max\left\{\sum_{s=1}^{k}[\lambda_s(A)+\lambda_{n-s+1}(B)],\ \sum_{B=1}^{k}[\lambda_{n-s+1}(A)+\lambda_s(B)]\right\}$$
$$\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A+B)\leqslant\sum_{s=1}^{k}[\lambda_s(A)+\lambda_s(B)],1\leqslant k\leqslant n \tag{5.3.15}$$

且当 $k=n$ 时等号成立.

证 我们有

$$\max_{UU^*=I_k}\{\mathrm{tr}(UAU^*)\}+\min_{UU^*=I_k}\{\mathrm{tr}(UBU^*)\}$$
$$=\max_{UU^*=I_k}\{\mathrm{tr}(UAU^*)+\min_{UU^*=I_k}(\mathrm{tr}(UBU^*))\}$$
$$\leqslant\max_{UU^*=I_k}\{\mathrm{tr}(UAU^*)+\mathrm{tr}(UBU^*)\}$$
$$=\max_{UU^*=I_k}\{\mathrm{tr}U(A+B)U^*\}$$
$$\leqslant\max\{\mathrm{tr}UAU^*\}+\max\{\mathrm{tr}UAU^*\}$$

从而由命题 5.3.2 即得

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)+\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(B)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A+B)$$
$$\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)+\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(B)$$

同理可证

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)+\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(B)\leqslant\sum_{s=1}^{k}S_s(A+B)$$
$$\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)+\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(B)$$

故式(5.3.14)成立.

当 $k=n$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{k}[\lambda_s(A)+\lambda_{n-s+1}(B)]=\mathrm{tr}(A+B)$$

$$= \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A) + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(B)$$ □

定理 5.3.8 设 $A, B \in SC_n(Q)$，则

1° 对满足 $1 \leqslant j, k \leqslant n$，且 $j + k \geqslant n + 1$ 的 j 和 k 均有

$$\lambda_{j+k-n}(A + B) \leqslant \lambda_j(A) + \lambda_k(B) \qquad (5.3.16)$$

2° 对满足 $1 \leqslant j, k \leqslant n$ 且 $j + k \leqslant n + 1$ 的 j 和 k 均有

$$\lambda_{j+k-1}(A + B) \geqslant \lambda_j(A) + \lambda_k(B) \qquad (5.3.17)$$

证 1° 采用数学归纳法，由定理 4.1.17 知，对任意 $U \in U^{n \times n}$ 和 $G \in SC_n(Q)$，有

$$\lambda_k(UGU^*) = \lambda_k(G) \quad (k = 1, \cdots, n)$$

因此在式(5.3.16)中我们可设

$$A = \Lambda_n = \mathrm{diag}(\lambda_1(A), \cdots \lambda_n(A))$$

当 $n = 1$ 时式(5.3.16)显然成立，假设对 $n - 1$，式(5.3.16)成立.

令 $$B = \begin{pmatrix} B_{n-1} & a \\ a^* & b_{nn} \end{pmatrix} \ (b_{nn} \in R), \ C_n = A + B$$

则 $$C_n = \begin{pmatrix} C_{n-1} & a \\ a^* & \lambda_n(A) + b_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $$C_{n-1} = B_{n-1} + \Lambda_{n-1}$$

当 $\max\{j, k\} = n$ 或 $\min\{j, k\} = 1$ 时，由式(5.3.9)可知式(5.3.16)成立.

当 $1 < j, k < n$ 时，显然

$$\lambda_{j+k-n}(A + B) = \lambda_{j+(k-1)-(n-1)}(A + B)$$

因为 $1 \leqslant j + (k - 1) - (n - 1) < m$，由式(5.3.9)和归纳假设，可得

$$\lambda_{j+(k+1)-(n-1)}(A + B) \leqslant \lambda_{j+(k+1)-(n-1)}(C_{n-1})$$
$$\leqslant \lambda_j(\Lambda_{n-1}) + \lambda_{k-1}(B_{n-1})$$

$$=\lambda_j(A)+\lambda_{k-1}(B_{n-1})$$

由定理 5.3.3 知 $\qquad \lambda_{k-1}(B_{n-1}),\leqslant\lambda_k(B)$

故 $\qquad \lambda_{j+(k-1)-(n-1)}(A+B)\leqslant\lambda_j(A)+\lambda_k(B)$

即 $\qquad \lambda_{j+k-n}(A+B)\leqslant\lambda_j(A)+\lambda_k(B)$

由数学归纳法即知式(5.3.16)成立.

因为 $\lambda_i(-A)=-\lambda_{n-i+1}(A)(1\leqslant i\leqslant n)$,用 $-A,-B$ 代替式(5.3.16)中的 A、B 可知式(5.3.17)成立. □

当 $A=(a_{ij})\in SC_n(Q)$时,约定$\{\sigma_1(A),\cdots,\sigma_n(A)\}$与$\{a_{11},\cdots,a_{nn}\}$为同一集合,且 $\sigma_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(A)$,而 $\lambda(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$为 A 的特征值.

定理 5.3.9 设 $A\in SC_n(Q)$,则

$$\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A),k=1,\cdots,n \tag{5.3.18}$$

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_{n-s+1}(A),k=1,\cdots,n, \tag{5.3.19}$$

证法 1 由 $A\in SC_n(Q)$及定理 4.1.14 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$A=U\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))U^* \qquad ①$$

设 $V\in U^{n\times n}$且 V 是使$\widetilde{A}=(\tilde{a}_{st})=VAV^*$满足 $\tilde{a}_{ss}=\sigma_s(\widetilde{A})=\sigma_s(A)$的置换阵,令 $\widetilde{U}=(u_{ij})=UV$,则 $\widetilde{U}\in U^{n\times n}$,且有

$$\widetilde{A}=\widetilde{U}\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))\widetilde{U}^*$$

因 $$\sum_{s=1}^{n}N(u_{st})=\sum_{t=1}^{n}N(u_{st})=1 \qquad ②$$

令 $$C_t^{(k)}=\sum_{s=1}^{k}N(u_{st})$$

则由式②有

$$\sum_{t=1}^{l} C_t^{(k)} = \sum_{t=1}^{l} \sum_{s=1}^{k} N(u_{st})$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{l} \sum_{s=1}^{n} N(u_{st}) = l, 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$$\sum_{t=1}^{l} C_t^{(k)} = \sum_{t=1}^{l} \sum_{t=1}^{k} N(u_{st})$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{l} N(u_{st})$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} N(u_{st}) = k, 1 \leqslant k \leqslant n$$

故

$$\sum_{t=1}^{l} C_t^{(k)} \leqslant \min\{l, k\}. \qquad ③$$

于是由式①,(1.1.10),③及定理 5.1.6,有

$$\sum_{s=1}^{k} \sigma_s(A) = \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} u_{st}\lambda_t(A)\bar{u}_{st}$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} \lambda_t(A) N(u_{st})$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \lambda_t(A) C_t^{(k)}$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{k} \lambda_t(A), k = 1, \cdots, n.$$

故式(5.3.18)成立.

又因为 $\quad \operatorname{tr}A = \sum_{s=1}^{n} \sigma_s(A) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A)$

于是由上式及式(5.3.18),有

$$\sum_{s=1}^{k} \sigma_{n-s+1}(A) = \operatorname{tr}A - \sum_{s=1}^{n-k} \sigma_s(A)$$

$$\geqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A) - \sum_{s=1}^{1-k} \lambda_s(A)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_{n-s+1}(A)$$

故式(5.3.19)成立. □

证法2 显然存在置换矩阵 $T \in U^{n\times n}$,使

$$TAT^* = \begin{pmatrix} \sigma_1(A) & & & \\ & \sigma_2(A) & & * \\ & * & \ddots & \\ & & & \sigma_n(A) \end{pmatrix}$$

因为 $A \in SC_n(Q)$,则由定理 4.1.17,知

$$\lambda_s(A) = \lambda_s(TAT^*), s = 1, \cdots, n \qquad ①$$

因 $\sum_{s=1}^{n} a_{ss} = \mathrm{tr}A$,对任一正整数 $k(<n)$,设 TAT^* 的 k 阶顺序主子阵为 B_k,由定理 5.3.3 及式①知

$$\sum_{s=1}^{k} \sigma_s(A) = \mathrm{tr}(B_k) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(B_k)$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(TAT^*)$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A), k = 1, \cdots, n$$

故式(5.3.18)成立.

而式(5.3.19)的证明同证法一. □

关于半正定自共轭阵的乘积的特征值,我们有以下的不等式:

定理 5.3.10 设 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$\max\left\{\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\lambda_{n-s+1}(B), \sum_{s=1}^{k} \lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(B)\right\}$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(AB) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\lambda_s(B), k = 1, \cdots, n. \qquad (5.3.20)$$

证 由定理 4.1.14 知,存在 $U \in U^{n\times n}$,使

$$UAU^* = \mathrm{diag}(\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A))$$

于是 $$UA^{\frac{1}{2}}U^*=\mathrm{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}}(A),\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{2}}(A))$$

记 $\tilde{B}=UBU^*=\begin{pmatrix}B_1 & B_3^*\\ B_3 & B_2\end{pmatrix}=(\widetilde{b_{ij}})$，其中 $B_1\in Q^{k\times k}$，$1\leqslant k\leqslant n$，由定理 4.3.4 及定理 4.3.8 知，$\tilde{B}\in SC_n(Q)$，$B_1\in SC_k(Q)$，则由定理 5.3.3 与定理 4.1.17，知

$$\lambda_s(B_1)\geqslant\lambda_{n-s+1}(\tilde{B})=\lambda_{n-s+1}(B),s=1,\cdots,k$$

于是由定理 4.3.6 及上式，有

$$\mathrm{tr}B_1=\sum_{s=1}^{k}\widetilde{b_{ss}}=\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(B_1)\geqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(B) \qquad ①$$

又由定理 4.3.15 知

$$\lambda_s(AB)=\lambda_s(BA)=\lambda_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}),s=1,\cdots,n \qquad ②$$

注意到 $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\in SC_n(Q)$，于是由式②，(5.3.17)，阿贝尔变换，及式①，有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(AB)&=\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})\\ &\geqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})\\ &=\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\widetilde{b_{ss}}\\ &=\sum_{s=1}^{k-1}[\lambda_s(A)-\lambda_{s+1}(A)]\sum_{t=1}^{s}\widetilde{b_{tt}}+\lambda_k(A)\sum_{t=1}^{k}\widetilde{b_{tt}}\\ &\geqslant\sum_{s=1}^{k-1}[\lambda_s(A)-\lambda_{s+1}(A)]\sum_{t=1}^{s}\lambda_{n-t+1}(B)\\ &\quad+\lambda_k(A)\sum_{t=1}^{k}\lambda_{n-t+1}(B)\\ &=\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_{n-s+1}(B)\end{aligned}$$

又由式②，$\lambda_s(AB)=\lambda_s(BA)(s=1,\cdots,n)$，有

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(AB)\geqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(B)$$

故式(5.3.19)的左端不等式成立.

再证式(5.3.20)的右端不等式.

因为 $B, A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，故分别存在 $W,V\in U^{n\times n}$，使

$$WA^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}W^*=\mathrm{diag}(\lambda_1(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}),\cdots,\lambda_n(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}))$$

$$V^*BV=\mathrm{diag}(\lambda_1(B),\cdots,\lambda_n(B))$$

故有

$$\begin{aligned}&\mathrm{diag}(\lambda_1(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}),\cdots,\lambda_n(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}))\\&\quad=P\mathrm{diag}(\lambda_1(B),\cdots,\lambda_n(B))P^*\end{aligned}\qquad ③$$

其中 $$P^*=(p_{st})=WA^{\frac{1}{2}}V\in Q^{n\times n},$$

令 $$C_t^{(k)}=\sum_{s=1}^{k}N(p_{st})$$

由定理 5.3.9，即式(5.3.18)知，当 $1\leqslant l\leqslant k$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{l}C_t^{(k)}&=\sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{k}N(p_{st})\leqslant\sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{n}N(p_{st})\\&=\sum_{t=1}^{l}(P^*P)_{tt}=\sum_{t=1}^{l}(V^*A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}V)_{tt}\\&=\sum_{t=1}^{l}\delta_t(A)\leqslant\sum_{t=1}^{l}\lambda_t(A)\end{aligned}$$

当 $k\leqslant l\leqslant n$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{l}C_t^{(k)}&=\sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{k}N(p_{st})=\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{l}N(p_{st})\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{n}N(p_{st})=\sum_{s=1}^{k}(PP^*)_{ss}\end{aligned}$$

$$= \sum_{s=1}^{k} (WA^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}W^*)_{ss}$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \delta_s(A) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)$$

即 $$\sum_{t=1}^{l} C_t^{(k)} \leqslant \begin{cases} \sum_{t=1}^{l} \lambda_t(A), \text{当 } 1 \leqslant l \leqslant k \text{ 时} \\ \sum_{t=1}^{k} \lambda_t(A), \text{当 } k \leqslant l \leqslant n \text{ 时} \end{cases} \quad ④$$

于是由式③,④及定理 5.1.7,有

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(AB) &= \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}) \\ &= \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} p_{st}\lambda_t(B)\bar{p}_{st} \\ &= \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} N(p_{st})\lambda_t(B) \\ &= \sum_{t=1}^{n} \lambda_t(B) \sum_{s=1}^{k} N(p_{st}) \\ &= \sum_{t=1}^{n} \lambda_t(B)C_t^{(k)} \\ &\leqslant \sum_{t=1}^{k} \lambda_t(A)\lambda_t(B) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\lambda_s(B) \end{aligned}$$

故式(5.3.20)的右边不等式成立. □

关于半正定自共轭阵的乘积的特征值之积也有类似的不等式.为此,我们先引入复 Hermite 半正定矩阵的乘积的特征值之积的不等式,即如下的

命题 5.3.3[3] 设 $A,B \in SC_n^{\geqslant}(C)$,则

$$\prod_{s=1}^{k} \lambda_s(AB) \leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\lambda_s(B), s=1,\cdots,n$$

定理 5.3.11 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$\prod_{s=1}^{k}\lambda_s(AB)\leqslant\prod_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_s(B),k=1,\cdots,n \quad (5.3.21)$$

证 由 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$及定理 4.3.15 知,存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$PABP^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1(AB),\cdots,\lambda_n(AB))$$

在上式两端取导出阵,由式(2.3.15),(2.3.16),得

$$\begin{aligned}&p^{\sigma}(AB)^{\sigma}(p^{\sigma})^{-1}\\&=\mathrm{diag}(\lambda_1(AB),\cdots,\lambda_n(AB),\lambda_1(AB),\cdots,\lambda_n(AB))\end{aligned}$$

于是由定理 4.3.17,式(2.3.15)及命题 5.3.3,有

$$\begin{aligned}\left(\prod_{s=1}^{k}\lambda_s(AB)\right)^2&=\prod_{s=1}^{2k}\lambda_s((AB)^{\sigma})=\prod_{s=1}^{2k}\lambda_s(A^{\sigma}B^{\sigma})\\&\leqslant\prod_{s=1}^{2k}\lambda_s(A^{\sigma})\lambda_s(B^{\sigma})=\left(\prod_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\right)^2\end{aligned}$$

由此即知式(5.3.21)成立. □

注意 由不等式(5.3.21)及定理 5.1.12 也可直接推得式(5.3.20)的右边不等式.

命题 5.3.4[3] 设 $A,B\in C^{n\times n}$,则

$$\prod_{s=1}^{k}|\lambda_s(AB)|\leqslant\prod_{s=1}^{k}\sigma_s(AB)\leqslant\prod_{s=1}^{k}\sigma_s(A)\sigma_s(B),1\leqslant k\leqslant n \quad (5.3.22)$$

命题 5.3.5 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$m$ 为正整数,则

$$\prod_{s=1}^{k}\lambda_s^{m}(AB)\leqslant\prod_{s=1}^{k}\lambda_s(A^mB^m),1\leqslant k\leqslant n \quad (5.3.23)$$

证 先证 $A,B\in SC_n^{>}(C)$的情形.

对 m 采用第二数学归纳法.设 k:$1\leqslant k\leqslant n$.

当 $m=1$ 时,显然不等式(5.3.23)取等号成立.假定当 $1\leqslant m\leqslant p$ 时,不等式(5.2.23)都成立,即

$$\prod_{s=1}^{k} \lambda_s^m(AB) \leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^m B^m) \quad (1 \leqslant m \leqslant p) \qquad ①$$

下面证明:当 $m = p + 1$ 时,不等式(5.3.23)也成立,分两种情况来讨论:

(i)若 $p+1=2r$ 时,有 $1 \leqslant r \leqslant p$,从而由式①即归纳假设及命题5.3.4,并注意到 $A^r, B^r \in SC_n^{>}(C)$,于是有

$$\begin{aligned}
\prod_{s=1}^{k} \lambda_s^{p+1}(AB) &= \left[\prod_{s=1}^{k} \lambda_s^k(AB)\right]^2 \\
&\leqslant \left[\prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^r B^r)\right]^2 = \left[\prod_{s=1}^{k} |\lambda_s(A^r B^r)|\right]^2 \\
&\leqslant \left[\prod_{s=1}^{k} \sigma_s(A^r B^r)\right]^2 = \prod_{s=1}^{k} \sigma_s^2(A^r B^r) \\
&= \prod_{s=1}^{k} \lambda_s((A^r B^r)^* A^r B^r) = \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(B^r A^{2r} B^r) \\
&= \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^{2r} B^{2r}) = \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^{p+1} B^{p+1})
\end{aligned}$$

(ii)若 $p+1=2r+1$,当 $1<r+1 \leqslant p$ 时,由归纳假设即式①和命题5.3.3,有

$$\begin{aligned}
\prod_{s=1}^{k} \lambda_s^{r+1}(AB) &\leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^{r+1} B^{r+1}) \\
&\leqslant \prod_{s=1}^{k} \sigma_s(B^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}) \sigma_s(A^{r+\frac{1}{2}} B^{r+\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\prod_{s=1}^{k} \lambda_s^{p+1}(AB) &= \prod_{s=1}^{k} \lambda_s^{2(r+1)}(AB) \lambda_n^{-1}(AB) \\
&\leqslant \prod_{s=1}^{k} \sigma_s^2(B^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}) \sigma_s^2(A^{r+\frac{1}{2}} B^{r+\frac{1}{2}}) \lambda_s^{-1}(AB) \\
&= \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^{2r+1} B^{2r+1})
\end{aligned}$$

$$= \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^{p+1}B^{p+1}) \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

综上,当 $A, B \in SC_n^{>}(C)$ 时,不等式(5.3.23)获证.

当 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(C)$ 时,任意 $\varepsilon > 0$,则 $A_\varepsilon = A + \varepsilon I_n$, $B_\varepsilon = B + \varepsilon I_n \in SC_n^{>}(C)$. 于是由刚才证明的事实,有

$$\prod_{s=1}^{k} \lambda_\varepsilon^{m}(A_\varepsilon B_\varepsilon) \leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A_\varepsilon^{m} B_\varepsilon^{m}) \qquad ②$$

注意到 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} A_\varepsilon = A$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} B_\varepsilon = B$,于是在②式中,令 $\varepsilon \to 0^+$,即得式(5.3.23). □

命题 5.3.6 设 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(C)$, m 为正整数而 $1 \leqslant k < n$,则

$$1^\circ \ \prod_{s=1}^{k} \lambda_s((AB)^m) \leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^m B^m) \leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^m)\lambda_s(B^m) \qquad (5.3.24)$$

$$2^\circ \ \sum_{s=1}^{k} \lambda_s((AB)^m) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A^m B^m) \leqslant \sum_{s=1}^{s} \lambda_s(A^m)\lambda_s(B^m) \qquad (5.3.25)$$

证 1° 由 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(C)$ 及定理 4.3.15 知,有可逆阵 $P \in C^{n \times n}$,使

$$PABP^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1(AB), \cdots \lambda_n(AB)), \lambda_s(AB) \geqslant 0, \ 1 \leqslant s \leqslant n$$

于是由上式及式(5.3.23),有

$$\prod_{s=1}^{k} \lambda_s((AB)^m) = \prod_{s=1}^{k} \lambda_s^{m}(AB) \leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^m B^m), 1 \leqslant k \leqslant n \qquad ①$$

又由 $A^m, B^m \in SC_n^{\geqslant}(C)$ 及文献[4]62 页定理 5,知

$$\prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^m B^m) \leqslant \prod_{s=1}^{k} \lambda_s(A^m)\lambda_s(B^m), k = 1, \cdots, n \qquad ②$$

故由式①,②即知式(5.3.24)成立.

2° 由式(5.3.24)及定理5.1.12即知式(5.3.25)成立. □

定理5.3.12 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, m 为正整数,则 $(AB)^m$, A^mB^m 都是中心封闭阵,且都相似于非负实对角阵,并有

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_s((AB)^m)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A^mB^m)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s^m(A)\lambda_s^m(B),1\leqslant k\leqslant n \tag{5.3.26}$$

证 由 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$ 及命题5.3.1知, $A^m,B^m\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,且

$$\lambda_s(A^m)=\lambda_s^m(A),\lambda_s(B^m)=\lambda_s^m(B),1\leqslant s\leqslant n$$

由定理4.3.15知, AB 也是中心封闭阵,即存在可逆阵 $P_1\in Q^{n\times n}$,使

$$P_1ABP_1^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1(AB),\cdots,\lambda_n(AB))$$

于是有

$$P_1(AB)^mP_1^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1^m(AB),\cdots,\lambda_n^m(AB)). \quad ①$$

可见 $(AB)^m$ 也是中心封闭阵,且

$$\lambda_s((AB)^m)=\lambda_s^m(AB)\geqslant 0,1\leqslant s\leqslant n$$

又 A^mB^m 也是中心封闭阵,则存在可逆阵 $P_2\in Q^{n\times n}$,使

$$P_2A^mB^mP_2^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1(A^mB^m),\cdots,\lambda_n(A^mB^m)) \quad ②$$

对式①,②两端取导出阵,得

$$\begin{aligned}&P_1^{\sigma}((AB)^m)^{\sigma}(P_1^{\sigma})^{-1}\\&=\mathrm{diag}(\lambda_1(AB)^m),\cdots,\lambda_n((AB)^m),\lambda_1((AB)^m),\cdots,\lambda_n((AB)^m)) \quad ③\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P_2^{\sigma}(A^mB^m)^{\sigma}(P_2^{\sigma})^{-1}\\&=\mathrm{diag}(\lambda_1(A^mB^m),\cdots,\lambda_n(A^mB^m),\lambda_1(A^mB^m),\cdots,\lambda_n(A^mB^m)) \quad ④\end{aligned}$$

这样,由式③,④,(2.3.14),(2.3.15)及(5.3.25),有

$$
\begin{aligned}
2\sum_{s=1}^{k}\lambda_s((AB)^m) &= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s(((AB)^m)^\sigma) \\
&= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s(((AB)^\sigma)^m) \\
&= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^\sigma B^\sigma)^m) \\
&\leqslant \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^\sigma)^m(B^\sigma)^m) \\
&= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^m)^\sigma(B^m)^\sigma) \\
&= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^mB^m)^\sigma) \\
&= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^m)^\sigma(B^m)^\sigma) \\
&= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^\sigma)^m(B^\sigma)^m) \\
&\leqslant \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^\sigma)^m)\lambda_s((B^\sigma)^m) \\
&= \sum_{s=1}^{2k}\lambda_s((A^m)^\sigma)\lambda_s((B^m)^\sigma) \\
&= 2\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A^m)\lambda_s(B^m)
\end{aligned}
$$

由此即知,式(5.3.26)成立. □

定理 5.3.13 设 $A\in SC_n(Q)$,$P\in Q^{k\times n}(k\leqslant n)$,则

$$
\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(PP^*)\leqslant \mathrm{tr}(PAP^*)\leqslant \sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_s(PP^*) \tag{5.3.27}
$$

证 因为 $A \in SC_n(Q)$,则由定理 4.1.14 知,A 可分解为

$$A = UDU^*, U \in U^{n \times n}, D = \mathrm{diag}(\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A))$$

记 $\quad M = PU = (m_{ij}) \in Q^{k \times n}, B = (b_{ij}) = MM^* \in Q^{k \times k}$,

则

$$B = PUU^* P^* = PP^*,$$

从而 $\lambda_s(B) = \lambda_s(PP^*), s = 1, \cdots, k$,且当 $s > k$ 时,取 $\lambda_s(B) = 0$,记 $\{\delta_1(B), \cdots, \delta_n(B)\} = \{b_{11}, \cdots, b_{nn}\}$ 且 $\delta_1(B) \geqslant \cdots \geqslant \delta_n(B)$. 于是有

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(PAP^*) = \mathrm{tr}(MDM^*) &= \sum_{t=1}^{k} \sum_{s=1}^{n} m_{ts} \lambda_s(A) \overline{m}_{ts} \\
&= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A) \sum_{t=1}^{k} m_{ts} \overline{m}_{ts} \\
&= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A) \sum_{t=1}^{k} \overline{m}_{ts} m_{ts} \\
&= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A) b_{ss} \qquad ①
\end{aligned}$$

由命题 5.1.4,有

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n} \lambda_{n-s+1}(A) \delta_s(B) &\leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A) b_{ss} \\
&\leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A) \delta_s(B) \qquad ②
\end{aligned}$$

由定理 5.3.9 知

$$\sum_{s=1}^{n} \delta_s(B) \leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(B) \qquad ③$$

从而由式③及定理 5.1.5,有

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A) \delta_s(B) &\leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A) \lambda_s(B) \\
&= \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A) \lambda_s(B)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\lambda_s(PP^*) \qquad ④$$

由式①,②,④即知式(5.3.27)的右边不等式成立.

又

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(PP^*) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(B)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(B)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \lambda_{k-s+1}(A)\delta_s(B) \qquad ⑤$$

由式⑤及②即知式(5.3.2)的左边不等式成立. □

定理 5.3.14 设 $A \in SC_n(Q)$, $P \in Q^{n \times n}$,则

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_{n-s+1}(PAP^*) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\lambda_s(PP^*), 1 \leqslant k \leqslant n \tag{5.3.28}$$

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(PP^*) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(PAP^*), 1 \leqslant k \leqslant n \tag{5.3.29}$$

证 首先由定理 4.2.7 知,存在 $U, V \in U^{n \times n}$,使

$$P = U\mathrm{diag}(\sigma_1(P), \cdots, \sigma_n(P))V$$

其中 $\sigma_1(P) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n(P)$为 P 的 n 个奇异值.

令 $$B = (b_{ij}) = VAV^*, \text{则 } B \in SC_n(Q)$$

再令 $$X = U^*(PAP^*)U \in SC_n(Q) \qquad ①$$

则 $$X = \mathrm{diag}(\sigma_1(P), \cdots, \sigma_n(P))B\mathrm{diag}(\sigma_1(P), \cdots, \sigma_n(P))$$
$$= (\sigma_s(P)b_{st}\sigma_t(P)) = (x_{st})$$

于是 $$\tilde{\delta}_s(X) = \tilde{\delta}_s(B)\sigma_s^2(P), s = 1, \cdots, n \qquad ②$$

(其中符号 $\tilde{\delta}_1(A), \cdots, \tilde{\delta}_n(A)$表示 $\delta_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \delta_n(A)$的乱序排列).

又因为对任意的 $V\in U^{n\times n}$和任意的$A\in SC_n(Q)$，有

$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{s=1}^{n}\tilde{\sigma}_s(A)=\sum_{s=1}^{n}\sigma_s(A)=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)$$

$$\lambda_s(A)=\lambda_s(VAV^*),s=1,\cdots,n \qquad ③$$

于是由式①，③，(5.3.19)，(5.1.9)，②，(5.1.13)，有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(PAP^*)&=\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(X)\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}\delta_{k-s+1}(X)\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}\tilde{\delta}_s(X)\\&=\sum_{s=1}^{k}\tilde{\delta}_s(B)\sigma_s{}^2(P)\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}\delta_s(B)\sigma_s{}^2(P)\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(B)\sigma_s{}^2(P)\\&=\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_s(PP^*),1\leqslant k\leqslant n\end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(PP^*)&=\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(B)\sigma_s{}^2(P)\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}\delta_{n-s+1}(B)\sigma_s{}^2(P)\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}\delta_s(B)\sigma_s{}^2(P)\\&=\sum_{s=1}^{k}\delta_s(X)\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(X)$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(PAP^*), 1 \leqslant k \leqslant n \qquad \square$$

定理 5.3.15 设 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则

1° 当 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geqslant 1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(AB) \leqslant \left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A^p)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(B)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\right]\left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(B)\right], k=1,\cdots,n \tag{5.3.30}$$

2° 当 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=r<1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(AB) \leqslant k^{1-r}\left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A^p)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(B^q)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leqslant k^{1-r}\left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\right]\left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(B)\right], k=1,\cdots,n \tag{5.3.31}$$

证 由不等式(5.3.20)，(5.2.22)及命题 5.3.1 之 3°，得

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(AB) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A)\lambda_s(B)$$

$$\leqslant \left(\sum_{s=1}^{k} \lambda_s^p(A)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{s=1}^{k} \lambda_s^q(A)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A^p)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(A^q)\right)^{\frac{1}{q}}$$

又由 $p>1$ 及 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geqslant 1$ 有 $q>1$，故由琴生不等式(5.2.9)，有

$$\left(\sum_{s=1}^{k}\lambda_s^p(A)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{s=1}^{k}\lambda_s^q(A)\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left[\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\right]\left[\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\right]$$

由此即得式(5.3.30).同理由式(5.2.23)即可得式(5.3.31). □

定理 5.3.16 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$,则

$$\left[\prod_{s=1}^{n-k+1}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\right]^{\frac{1}{n-k+1}}\leqslant\lambda_k(AB)$$

$$\leqslant\left[\prod_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\right]^{\frac{1}{k}},1\leqslant k\leqslant n \tag{5.3.32}$$

证 由不等式(5.3.21),有

$$[\lambda_k(AB)]^k\leqslant\prod_{s=1}^{k}\lambda_k(AB)\leqslant\prod_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_s(B)$$

由此即知(5.3.32)的右边不等式成立.

由 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$及定理 4.3.6 之 5°知,当 $1\leqslant s\leqslant n$ 时,有

$$\lambda_{n-s+1}(A^{-1})=\frac{1}{\lambda_s(A)}$$

$$\lambda_{n-s+1}(B^{-1})=\frac{1}{\lambda_s(B)}$$

$$\lambda_{n-s+1}((AB)^{-1})=\frac{1}{\lambda_s(AB)}$$

于是由上诸式及式(5.3.21),知

$$\left[\frac{1}{\lambda_k(AB)}\right]^{n-k+1}=[\lambda_{n-k+1}((AB)^{-1})]^{n-k+1}$$

$$\leqslant\prod_{s=1}^{n-k+1}\lambda_s((AB)^{-1})=\prod_{s=1}^{n-k+1}\lambda_s(B^{-1}A^{-1})$$

$$\leqslant\prod_{s=1}^{n-k+1}\lambda_s(B^{-1})\lambda_s(A^{-1})$$

$$=\prod_{s=1}^{n-k+1}\frac{1}{\lambda_s(A)\lambda_s(B)}$$

故
$$\prod_{s=1}^{n-k+1} \lambda_s(A)\lambda_s(B) \leqslant [\lambda_k(AB)]^{n-k+1}$$

即
$$\sqrt[n-k+1]{\prod_{s=1}^{n-k+1} \lambda_s(A)\lambda_s(B)} \leqslant \lambda_k(AB), 1 \leqslant k \leqslant n$$

这就证明了不等式(5.3.32)的左边部分. □

推论 设 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则仍有式(5.3.32)成立

证 这只需用 $A+\varepsilon I$ 与 $B+\varepsilon I(\forall \varepsilon>0)$分别代替 A 与 B,然后令 $\varepsilon \to 0^+$ 即得. □

注 1 上述方法常被称为**连续性方法**,它是由正定矩阵中的不等式或等式过渡到半正定矩阵常用的一种方法.

注 2 定理5.3.16及其推论给出了两个半正定自共轭矩阵之积的特征值的较精确的一种估计.所得结论当然对实和复(半)正定矩阵也是对的.

定理 5.3.17 设 $A, B \in SC_n^{>}(Q)$,则

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(AB) = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB)^{-1}) \leqslant \sum_{s=1}^{n} [\lambda_s(A)\lambda_s(B)]^{-1} \tag{5.3.33}$$

$$n^2\left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(A)\lambda_s^{-1}(B)\right]^{-1} \leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(AB) = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)$$
$$\leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A)\lambda_s(B) \tag{5.3.34}$$

证 由 $A, B \in SC_n^{>}(Q)$及定理4.3.14知诸 $\lambda_s(AB)>0$,又 $A^{-1}>0, B^{-1}>0, (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$,它们的特征值分别为

$$\lambda_s^{-1}(A), \lambda_s^{-1}(B), \lambda_s^{-1}(AB), s=1,\cdots,n$$

在定理 5.3.10 中令 $k=n$,并利用式(4.3.12),则得

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A)\lambda_{n-s+1}(B) \leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(AB) = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A)\lambda_s(B) \qquad ①$$

于是由定理 4.3.6,式(4.2.25)及①,有

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(AB) = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB)^{-1}) = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(B^{-1}A^{-1}))$$

$$= \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A^{-1}B^{-1})) \leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A^{-1})\lambda_s(B^{-1})$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(A)\lambda_s^{-1}(B)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} [\lambda_s(A)\lambda_s(B)]^{-1}$$

故式(5.3.33)成立. □

注意到诸 $\lambda_s^{-1}(AB)>0$,由 Cauchy 不等式(5.2.27),可得

$$n^2 = \left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{\frac{1}{2}}(AB)\lambda_s^{-\frac{1}{2}}(AB)\right]^2$$

$$\leqslant \left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s(AB)\right]\left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(AB)\right]$$

故

$$n^2\left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(AB)\right]^{-1} \leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(AB) \qquad ②$$

于是由式(5.3.33)及式②,有

$$n^2\left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(A)\lambda_s^{-1}(B)\right]^{-1} \leqslant n^2\left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{-1}(AB)\right]^{-1}$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(AB) \qquad ③$$

从而由式③及(5.3.20)即得式(5.3.34). □

定理 5.3.18 设 $A, B \in SC_n^{>}(Q)$,则

$$n^2\max\{\lambda_n(A)(\mathrm{tr}B^{-1})^{-1},\lambda_n(B)(\mathrm{tr}A^{-1})^{-1}\}$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n}\lambda_s(AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)\leqslant\min\{\lambda_1(A)\mathrm{tr}B,\lambda_1(B)\mathrm{tr}A\}$$

(5.3.35)

$$\max\{\lambda_n(A)(\mathrm{tr}B^{-1})^{-1},\lambda_n(B)(\mathrm{tr}A^{-1})^{-1}\}$$

$$<\lambda_s(AB)\leqslant\min\{\lambda_1(A)\mathrm{tr}B,\lambda_1(B)\mathrm{tr}A\},s=1,\cdots,n$$

(5.3.36)

证 (5.3.35)和(5.3.36)两式的后半部分可由式(5.3.34)直接得到,又由 A^{-1},B^{-1}的特征值分别为

$$\lambda_n^{-1}(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_1^{-1}(A)(>0)$$

$$\lambda_n^{-1}(B)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_1^{-1}(B)(>0)$$

及式(5.3.35)的后半部分,得

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{-1}(A)\lambda_s^{-1}(B)=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A^{-1})\lambda_s(B^{-1})$$

$$\leqslant\min\{\lambda_n^{-1}(A)\mathrm{tr}B^{-1},\lambda_n^{-1}(B)\mathrm{tr}A^{-1}\}$$

于是有

$$\left[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{-1}(A)\lambda_s^{-1}(B)\right]^{-1}$$

$$\geqslant 1/\min\{\lambda_n^{-1}(A)\mathrm{tr}B^{-1},\lambda_n^{-1}(B)\mathrm{tr}A^{-1}\}$$

$$=\max\{\lambda_n(A)(\mathrm{tr}B^{-1})^{-1},\lambda_n(B)(\mathrm{tr}A^{-1})^{-1}\}$$

将上式代入式(5.3.34)便得式(5.3.35)的前半部分.又由式(5.3.35)的后半部分可得

$$\lambda_s^{-1}(AB)=\lambda_s(B^{-1}A^{-1})$$

$$<\min\{\lambda_n^{-1}(B)\mathrm{tr}A^{-1},\lambda_n^{-1}(B)\mathrm{tr}B^{-1}\},s=1,\cdots,n$$

于是有

$$\lambda_s(AB)>1/\min\{\lambda_n^{-1}(A)\mathrm{tr}B^{-1},\lambda_n^{-1}(B)\mathrm{tr}A^{-1}\}$$

$$=\max\{\lambda_n(A)(\mathrm{tr}B^{-1})^{-1},\lambda_n^{-1}(B)(\mathrm{tr}A^{-1})^{-1}\},s=1,\cdots,n \quad \square$$

定理 5.3.19 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$,则

$$\frac{2}{n}[\lambda_n^2(A)+\lambda_n^2(B)]^{-1}\lambda_n^2(A)\lambda_n^2(B)$$
$$<\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(AB)\leqslant\frac{n}{2}[\lambda_1^2(A)+\lambda_1^2(B)] \quad (5.3.37)$$

$$\frac{2}{n}[\lambda_n^2(A)+\lambda_n^2(B)]^{-1}\lambda_n^2(A)\lambda_n^2(B)$$
$$<\lambda_s(AB)<\frac{n}{2}[\lambda_1^2(A)+\lambda_1^2(B)],s=1,\cdots,n$$
$$(5.3.38)$$

证 由几何—算术平均值不等式,有

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\leqslant\frac{n}{2}[2\lambda_1(A)\lambda_1(B)]$$
$$\leqslant\frac{n}{2}[\lambda_n^2(A)+\lambda_1^2(B)] \quad ①$$

$$\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s(A)\lambda_s(B)]^{-1}=\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{\lambda_s(A)\lambda_s(B)}$$
$$\leqslant\frac{n}{2}\frac{1}{\lambda_n(A)\lambda_n(B)}\leqslant\frac{n}{2}\frac{\lambda_n^2(A)+\lambda_n^2(B)}{\lambda_n^2(A)\lambda_n^2(B)} \quad ②$$

将式①,②代入式(5.3.34)即得式(5.3.37),而式(5.3.38)由式(5.3.31)知显然成立. $\square$

关于一般四元数矩阵 A 的特征值(左、右特征值,并假设 A

的特征值存在），则有以下定理

定理 5.3.20 设 $A\in Q^{n\times n}$，$B=R(A)=\dfrac{A+A^*}{2}$，$p_1 p_n$ 分别为 B 的最大与最小特征值，若 λ 为 A 的左（或右）特征值，则

$$p_n\leqslant \mathrm{Re}(\lambda)\leqslant p_1 \tag{5.3.39}$$

证 不妨设 λ 为 A 的右特征值（为左特征值同样可证），即存在 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，使

$$Ax=x\lambda$$

则
$$x^*A^*=\bar{\lambda}x^*$$

于是有
$$x^*Ax=x^*x\lambda$$

$$xA^*x=\bar{\lambda}x^*x=x^*x\bar{\lambda}$$

上两式相加有 $x^*(A+A^*)x=x^*x(\lambda+\bar{\lambda})$

由 $x\neq 0$，则由上式有

$$\lambda+\bar{\lambda}=\frac{x^*(A+A^*)x}{x^*x}$$

即
$$\mathrm{Re}(\lambda)=\frac{\lambda+\bar{\lambda}}{2}=\frac{x^*[(A+A^*)/2]x}{x^*x}=\frac{x^*Bx}{x^*x}=\varphi_B(x) \tag{5.3.40}$$

故由定理 5.3.1 即知有

$$p_n\leqslant \mathrm{Re}(\lambda)\leqslant p_1$$ □

定理 5.3.21 设 $A\in Q^{n\times n}$，p_1 与 p_n 分别是 A^*A 的最大与最小特征值，λ 是 A 的左（或右）特征值，则

$$p_n\leqslant N(\lambda)\leqslant p_1 \tag{5.3.41}$$

证 不妨设 λ 是 A 的左特征值（为右特征值同样可证），即存在 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，使

$$Ax=\lambda x$$

则
$$x^*A^*=x^*\bar{\lambda}$$

用后式的两端左乘前式的两端，得

$$x^* A^* Ax = x^* \bar{\lambda}\lambda x$$

从而
$$N(x) = \bar{\lambda}\lambda = \frac{x^* A^* Ax}{x^* x} \tag{5.3.42}$$

故由定理 5.3.1 即知

$$p_n \leqslant N(\lambda) \leqslant p_1$$ □

推论 设 $A \in Q^{n\times n}$,若 A 存在左(或右)特征值,$x \in Q^{n\times 1}$为相应的特征向量,则

$$\left(\frac{x^*((A^*+A)/2)x}{x^* x}\right)^2 \leqslant \frac{x^* A^* Ax}{x^* x} \tag{5.3.43}$$

证 λ 为 A 的左(或右)特征值,显然有:$[\mathrm{Re}(\lambda)]^2 \leqslant N(\lambda)$,于是由式(5.3.40)及(5.3.42)即知式(5.3.43)成立. □

定义 5.3.3 设 $A \in Q^{n\times n}$,若 $R(A) = \dfrac{A+A^*}{2}$为正定阵,则称 A 为**亚正定阵**.

定理 5.3.22 设 $A \in Q^{n\times n}$,A 为亚正定阵,p_1, p_n 为 $A^* A$ 的最大与最小特征值,μ_1, μ_n 为 $R(A)$的最大与最小特征值,则

$$p_n - \mu_1{}^2 \leqslant N(\mathrm{Im}(\lambda)) \leqslant p_1 - \mu_n{}^2 \tag{5.3.44}$$

证 由于 A 为亚正定,则 $R(A)$为正定.从而 μ_1, μ_2 必为正实数,再注意到

$$N(\mathrm{Im}(\lambda)) = N(\lambda) - (\mathrm{Re}(\lambda))^2$$
$$= \frac{x^* A^* Ax}{x^* x} - \left[\frac{x^*((A+A^*)/2)x}{x^* x}\right]^2$$

此处 $x \in Q^{n\times 1}$为 A 的属于λ 的特征向量,从而结合定理 5.3.1,有

$$p_n - \mu_1{}^2 \leqslant N[\mathrm{Im}(\lambda)] \leqslant p_1 - \mu_n{}^2$$ □

定理 5.3.23 设 $A, B \in Q^{n\times n}$,p_1, p_n 为 $R(A)$的最大与最小特征值,μ_1, μ_n 为$R(B)$的最大与最小特征值,$\lambda(A+B)$为 $A+B$ 的左(或右)特征值,则

1° $p_n+\mu_n \leqslant \mathrm{Re}(\lambda(A+B)) \leqslant p_1+\mu_1$ (5.3.45)

2° $N(\lambda(A+B)) \geqslant \min\{(p_n+\mu_n)^2,(p_1+\mu_1)^2\}$ (5.3.46)

证 1° 设$x\in Q^{n\times 1}$为 $A+B$ 的对应于λ 的特征向量,则由式(5.3.40),有

$$\mathrm{Re}(\lambda(A+B))=\frac{x^*\left[\frac{(A+B)^*+(A+B)}{2}\right]x}{x^*x}$$

$$=\frac{x^*((A^*+A)/2)x+x^*((B^*+B)/2)x}{x^*x}$$

$$=\frac{x^*((A^*+A)/2)x}{x^*x}+\frac{x^*((B^*+B)/2)x}{x^*x}$$

于是由定理 5.3.20 即得

$$p_n+\mu_n \leqslant \mathrm{Re}(\lambda(A+B)) \leqslant p_1+\mu_1$$

2° 设 $x\in Q^{n\times 1}$ 为 $A+B$ 的对应于λ 的特征向量,由式(5.3.42)及(5.3.43),有

$$N(\lambda(A+B))=\frac{x^*(A+B)^*(A+B)x}{x^*x}$$

$$\geqslant\left[x^*\frac{(A+B)^*+(A+B)}{2}x\right]^2$$

$$=\left[\frac{x^*((A^*+A)/2)x}{x^*x}+\frac{x^*((B^*+B)/2)x}{x^*x}\right]^2$$

令 $$u=\frac{x^*((A^*+A)/2)x}{x^*x},\ v=\frac{x^*((B^*+B)/2)x}{x^*x}$$

则由定理 5.3.19,得

$$p_n+\mu_n \leqslant u+v \leqslant p_1+\mu_1$$

从而 $$(u+v)^2 \geqslant \min\{(p_n+\mu_n)^2,(p_1+\mu_1)^2\}$$

故 $$N(\lambda(A+B)) \geqslant \min\{(p_n+\mu_n)^2,(p_1+\mu_1)^2\}$$

即式(5.3.46)成立. □

对于四元数矩阵的谱值(见定义 4.1.4),有如下不等式:

定理 5.3.23(Schur 不等式) 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$的一组谱值,则

$$\sum_{s=1}^{n}|\lambda_s|^2\leqslant\sum_{s,t=1}^{n}|a_{st}|^2 \tag{5.3.47}$$

其中等号成立当且仅当 A 酉相似于对角阵.

证 由定理 4.1.4 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\mu_1 & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ & \mu_2 & \cdots & q_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \mu_n\end{pmatrix}=B \qquad ①$$

其中 $\mu_s=\mu_s^{(1)}+\mu_s^{(2)}\mathrm{i}\in C,\mu_s^{(2)}\geqslant 0,s=1,\cdots,n$

则 $B^*=U^*A^*U$,而且

$$BB^*=U^*AA^*U=\begin{pmatrix}|\mu_1|^2+\sum\limits_{t=1}^{n}|q_1|^2 & & & & \\ & |\mu_2|^2+\sum\limits_{t=2}^{n}|q_{2t}|^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & |\mu_{n-1}|^2+|q_{n-1,n}|^2 & \\ & & & & |\mu_n|^2\end{pmatrix}$$

再由定理 4.3.9 知

$$\mathrm{tr}(AA^*)=\mathrm{tr}(BB^*)$$

由此即得

$$\sum_{s,t=1}^{n}|a_{st}|^2=\sum_{s=1}^{n}|\mu_s|^2+\sum_{1\leqslant s<t\leqslant n}|q_{st}|^2 \tag{5.3.48}$$

因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的一组谱值,由定义 4.1.4 知 A 与上三角矩阵

$$C=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \qquad ②$$

相似，又已知 A 与 B 相似，故矩阵 B 与 C 相似，于是由式①，②及 $B \sim C$，推出 $\mu_s \sim \lambda_s (s=1,\cdots,n)$，即存在 $0 \neq b_s \in Q (s=1,\cdots,n)$ 使

$$\mu_s = b_s^{-1} \lambda_s b_s \Rightarrow |\mu_s| = |\lambda_s|, \ s=1,\cdots,n \qquad ③$$

从而由式②，式(5.3.48)及式③，有

$$\sum_{s,t=1}^{n} |a_{st}|^2 = \sum_{s=1}^{n} |\lambda_s|^2 + \sum_{1 \leqslant s < t \leqslant n} |q_{st}|^2 \qquad ④$$

由式④即知结论成立. □

定理 5.3.23 显然简单，但很有用，而且引出这样的问题：当且仅当矩阵 $A = (a_{ij}) \in Q^{n \times n}$ 酉相似于一对角阵，那么就有式(5.3.47)取等式成立，那么我们自然会问，什么样的矩阵是酉相似于对角阵的呢？我们早已知道，自共轭矩阵酉相似于一对角阵且是一实对角阵(定理 4.1.14)，除此之外，还有哪些矩阵满足这一事实呢？即如何刻画酉相似于对角阵的矩阵，这就是下述定义的起源.

定义 5.3.4 设 $A \in Q^{n \times n}$ 如果 $AA^* = A^* A$，则称 A 为**规范(norma)矩阵**.

定理 5.3.24 设 $A \in Q^{n \times n}$，则 A 酉相似于对角阵$\Leftrightarrow A$ 是规范阵.

证 设 A 酉相似于对角阵，即存在 $U \in U^{n \times n}$，使 $U^* AU = B$，而 B 是对角阵，则 $BB^* = B^* B$，于是有

$$\begin{aligned} AA^* &= (UBU^*)(UBU^*)^* = UBU^* UB^* U^* \\ &= UBB^* U^* = UB^* BU^* = A^* A \end{aligned}$$

故 A 是规范阵.

设 A 是规范阵，由定理 4.1.4 知，存在 $U \in U^{n \times n}$，使 $U^* AU = T$，T 为上三角阵，则

$$A = UTU^*, A^* = UT^* U^*$$

由 $AA^* = A^* A$，有

$$UTT^*U^* = UT^*TU^*$$

于是有
$$TT^* = T^*T$$

注意到 T 是上三角阵,从而由上式即得,T 必为对角阵. □

§5.4 四元数矩阵奇异值的不等式

在第四章第二节我们已经引入了四元数矩阵的奇异值的概念(见定义 4.2.5).本节是在前面所述内容的基础上给出有关四元数矩阵的奇异值的一系列不等式.

为方便计,对 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$,我们恒约定 $\{\delta_1(A),\cdots,\delta_n(A)\}$ 与 $\{a_{11},\cdots,a_{nn}\}$ 为同一集合,且 $|\delta_1(A)|\geqslant\cdots\geqslant|\delta_n(A)|$,$\sigma_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(A)$.

定理 5.4.1 设 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$,则

$$\left|\sum_{s=1}^{k} a_{ss}\right|\leqslant\sum_{s=1}^{k}|a_{ss}|\leqslant\sum_{s=1}^{k}|\delta_s(A)|\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A),1\leqslant k\leqslant n \tag{5.4.1}$$

证 前面两个不等号是显然的,现证最后一个不等号.因为置换阵为广义酉阵,故不失一般性,可设 $\delta_s(A)=a_{ss}(1\leqslant s\leqslant n)$.由矩阵的奇异值分解定理即定理 4.2.7 知,存在 $U=(u_{ij})$,$V=(v_{ij})\in U^{n\times n}$,使

$$A=U\mathrm{diag}(\sigma_1(A),\cdots,\sigma_n(A))V \tag{①}$$

令
$$C_t^{(k)}=\sum_{s=1}^{k}|u_{st}v_{ts}|\geqslant 0,t,k=1,\cdots,n$$

于是由 $\sum\limits_{\substack{s=1\\t\neq 1}}^{n}|u_{st}|^2=\sum\limits_{\substack{s=1\\t\neq 1}}^{n}|v_{st}|^2=1$ 及式(1.1.24),有

$$\sum_{t=1}^{l}C_t^{(k)}=\sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{k}|u_{st}v_{ts}|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{l} \sum_{s=1}^{k} (|u_{st}|^2 + |v_{ts}|^2) \leqslant \min\{k, l\}, 1 \leqslant l, k \leqslant n. \quad ②$$

由式①知，

$$\delta_s(A) = a_{ss} = \sum_{t=1}^{n} u_{st}\sigma_t(A) v_{ts}$$

故 $|\delta_s(A)| = |a_{ss}| \leqslant \sum_{t=1}^{n} |u_{st}\sigma_t(A) v_{ts}|$

$$= \sum_{t=1}^{n} \sigma_t(A) |u_{st}v_{ts}|, s = 1, \cdots, n \quad ③$$

于是由式③,②及定理 5.1.6,有

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{k} |\delta_s(A)| &\leqslant \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} \sigma_t(A) |u_{st}v_{ts}| \\ &= \sum_{t=1}^{n} \sigma_t(A) \sum_{s=1}^{k} |u_{st}v_{ts}| \\ &= \sum_{t=1}^{n} \sigma_t(A) C_t^{(k)} \\ &\leqslant \sum_{t=1}^{k} \sigma_t(A), k = 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

□

推论 1 设 $A \in Q^{n \times n}$ 的对角元素为 $a_1, \cdots, a_n$，则有

$$(\mathrm{Re}(a_1), \cdots, \mathrm{Re}(a_n)) \prec_w (|a_1|, \cdots, |a_n|) \prec_w (\sigma_1(A), \cdots, \sigma_n(A)), \quad (5.4.2)$$

其中 $|a_1| \geqslant \cdots \geqslant |a_n|, \sigma_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n(A)$.

推论 2 设 $A \in Q^{n \times n}$，则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A) \leqslant |\mathrm{tr}A| \leqslant \sum_{s=1}^{n} \sigma_s(A) \quad (5.4.3)$$

证 在(3.3.7)式中令 $k = n$，即有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A) \leqslant |\mathrm{tr}A| = |\sum_{s=1}^{n} a_{ss}|$$

$$=\left|\sum_{s=1}^{n}\delta_s(A)\right|\leqslant\sum_{s=1}^{n}|\delta_s(A)|\leqslant\sum_{s=1}^{h}\sigma_s(A)\qquad\square$$

定理 5.4.2 设 $A\in Q^{m\times n}$, U,V 为广义酉阵,则

$$\sigma_s(U^*AV)=\sigma_s(A),s=1,2,\cdots,\min\{m,n\}\tag{5.4.4}$$

证 由奇异值定义及定理 4.3.9,有

$$\begin{aligned}\sigma_s(U^*AV)&=\sqrt{\lambda_s((U^*AV)^*(U^*AV))}\\&=\sqrt{\lambda_s(UA^*AV)}\\&=\sqrt{\lambda_s(A^*A)}\\&=\sigma_s(A),s=1,2,\cdots,\min\{m,n\}\end{aligned}\qquad\square$$

定理 5.4.3 设 $M\in Q^{m\times n}$, $A\in Q^{s\times t}$, $m\geqslant s$, $n\geqslant t$, $\sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_{\min(m,n)}$, $\tau_1\geqslant\cdots\geqslant\tau_{\min(s,t)}$,分别是 M 和 A 的奇异值,则

$$\sigma_r\geqslant\tau_r,r=1,\cdots,\min(s,t)\tag{5.4.5}$$

$$\tau_r\geqslant\sigma_{r+(m-s)+(n-t)},r\leqslant\min(s+t-m,s+t-n)\tag{5.4.6}$$

特别地,当 $m=n$, $s=t=n-1$ 时,有

$$\sigma_1\geqslant\tau_1\geqslant\sigma_2\geqslant\tau_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_{n-1}\geqslant\tau_{n-1}\geqslant\sigma_n\tag{5.4.7}$$

证 由定理 5.4.2 知,M 与 U^*MV(其中 U,V 均为广义酉阵)有相同的奇异值,故可不妨设 A 是 M 的子矩阵.令

$$N=\begin{pmatrix}0&M\\M^*&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&A\\A^*&0\end{pmatrix}$$

由奇异值分解定理 4.2.7 知,有广义酉矩阵 V_1,V_2,使得 $M=V_1DV_2{}^*$,其中 D 的对角元为 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\min(m,n)}$,其余处为 0,于是

$$\begin{aligned}N&=\begin{pmatrix}0&V_1DV_2{}^*\\V_2D^{\mathrm T}V_1{}^*&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}V_1&0\\0&V_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&D\\D^{\mathrm T}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_1{}^*&0\\0&V_2{}^*\end{pmatrix}\end{aligned}$$

又对于实矩阵$\begin{pmatrix} 0 & D \\ D^T & 0 \end{pmatrix}$,易见其特征值为 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\min(m,n)},0,\cdots,0,-\sigma_{\min(m,n)},\cdots,-\sigma_1$,而$\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$是 $m+n$ 阶广义酉矩阵,则由定理 4.3.9 知它们也是 N 的特征值.

类似地可证 $\tau_1,\cdots,\tau_{\min(s,t)},0,\cdots,0,-\tau_{min(s,t)},\cdots,-\tau_1$ 为 B 的特征值,又 B 是 N 的 $s\times t$ 阶主子阵,从而由定理 5.3.3 知,本定理结论成立. □

推论 设 $A\in Q^{n\times n}$,$U_0\in Q^{n\times k}$,$1\leqslant k\leqslant h$,则

$$\sigma_s(AU_0)=\sigma_s(A),s=1,\cdots,k \tag{5.4.8}$$

证 因为 $AU_0\in Q^{n\times k}$是 $A\in Q^{n\times n}$ 的子矩阵,故由定理 5.4.3 即式(5.4.5),即得式(5.4.8). □

定理 5.4.4 设 $A\in Q^{n\times n}$,$U_0\in U^{n\times k}$,$1\leqslant k\leqslant n$,则

$$\det(U_0{}^*A^*AU_0)\leqslant \prod_{t=1}^{k}\sigma_t{}^2(A) \tag{5.4.9}$$

证 由命题 4.2.3 知,存在 $U_1\in U^{n\times(n-k)}$,使

$$U=(U_0,U_1)\in U^{n\times n}$$

因 $A^*A\in SC_n(Q)$,由定理 4.1.17 知,$\lambda_t(U^*A^*AU)=\lambda_t(A^*A)$ $(1\leqslant t\leqslant n)$.又 $U_0{}^*A^*AU_0$ 为 U^*A^*AU 的 k 阶顺序主子阵,由定理 4.3.8 知,$U_0{}^*A^*AU_0\in SC_k(Q)$,于是由定理 4.3.6 之 1°及定理 5.3.3,知

$$\begin{aligned}\det(U_0{}^*A^*AU_0)&=\prod_{t=1}^{k}\lambda_t(U_0{}^*A^*AU_0)\\&\leqslant\prod_{t=1}^{k}\lambda_t(U^*A^*AU)\\&=\prod_{t=1}^{k}\lambda_t(A^*A)=\prod_{t=1}^{k}\sigma_t{}^2(A)\end{aligned}$$

故式(5.4.9)成立. □

定理 5.4.5 设 $A\in Q^{n\times n}$, $U(A)=\{B=(b_{ij})=UAV\mid \forall U,V\in U^{n\times n}\}$,则

$$\max_{B\in U(A)}\{\mathrm{Re}(\sum_{s=1}^{k}b_{ss})\}=\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A),k=1,\cdots,n \qquad (5.4.10)$$

证 对$\forall B\in U(A)$,由定理5.4.2知

$$\sigma_s(B)=\sigma_s(A),s=1,\cdots,n$$

于是由定理5.4.1,有

$$\mathrm{Re}(\sum_{s=1}^{k}b_{ss})\leqslant\sum_{s=1}^{k}|\delta_s(B)|\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A),k=1,\cdots,n \qquad ①$$

又由奇异值分解定理4.2.7知,存在 $U,V\in U^{n\times n}$,使

$$B=UAV=\mathrm{diag}(\sigma_1(A),\cdots,\sigma_n(A))$$

便得

$$\mathrm{Re}(\sum_{s=1}^{k}b_{ss})=\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A) \qquad ②$$

由式①,②即知式(5.4.10)成立. □

定理 5.4.6 设 $A,B\in Q^{n\times n}$,则

$$\prod_{t=1}^{k}\sigma_t(A)\sigma_{n-s+1}(B)\leqslant\prod_{t=1}^{k}\sigma_t(AB)\leqslant\prod_{t=1}^{k}\sigma_t(A)\sigma_t(B),1\leqslant k\leqslant n. \qquad (5.4.11)$$

证 因为$(AB)^*AB\in SC_n(Q)$,故由定理4.1.14知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^*B^*A^*ABU=\mathrm{diag}(\sigma_1{}^2(AB),\cdots,\sigma_n^2(AB))$$

记 $U=(u_1,\cdots,u_n),U_k=(u_1,\cdots,u_k),(1\leqslant k\leqslant n)$

则由定理4.2.7(奇异值分解定理)知,存在 $V_1\in U^{k\times k}$, $V_2\in U^{n\times k}$,使得

$$BU_k=V_2D_1V_1,D_1=\mathrm{diag}(\sigma_1(BU_k),\cdots,\sigma_k(BU_k)). \qquad ①$$

于是由定理4.3.6,式①及定理3.3.11之推论与定理5.4.4,有

$$\begin{aligned}\prod_{t=1}^{k} \sigma_t^2(AB) &= \prod_{t=1}^{k} \lambda_t(B^* A^* AB) \\ &= \det(U_k^* B^* A^* ABU_k) \\ &= \det(V_1^* D_1 V_2^* A^* AV_2 D_1 V_1) \\ &= \det((D_1 V_1)^* (V_2^* A^* AV_2)(D_1 V_1)) \\ &= \det((D_1 V_1)^* (D_1 V_1)) \cdot \det(V_2^* A^* AV_2) \\ &= \det((V_1^* B^* BV_1)) \cdot \det(V_2^* A^* AV_2) \\ &\leqslant \prod_{t=1}^{k} \sigma_t^2(B) \prod_{t=1}^{k} \sigma_t^2(A) \\ &= \prod_{t=1}^{k} \sigma_t^2(A) \sigma_t^2(B)\end{aligned}$$

由此即得式(5.4.11)的右边不等式. 而由

$$\begin{aligned}\prod_{t=1}^{k} \sigma_t(A) &= \prod_{t=1}^{k} \sigma_t(ABB^{-1}) \leqslant \prod_{t=1}^{k} \sigma_t(AB)\sigma_t(B^{-1}) \\ &= \prod_{t=1}^{k} \sigma_t(AB)\sigma_{n-t+1}^{-1}(B)\end{aligned}$$

即得式(5.4.11)左边的不等式. □

推论 设 $A_s \in Q^{n \times n}, s = 1, \cdots, n$, 则

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_t\left(\prod_{s=1}^{m} A_s\right) \leqslant \prod_{t=1}^{k} \prod_{s=1}^{m} \sigma_t(A_s), 1 \leqslant k \leqslant n \tag{5.4.12}$$

证 用数学归纳法证之.

由定理 5.4.6 即式(5.4.11)的右边不等式即知当 $m = 2$ 时式(5.4.12)成立. 现假设式(5.4.12)对 $2 \leqslant m \leqslant r - 1$ 成立. 于是由归纳假设, 对 $m = r$, 有

$$\begin{aligned}\prod_{t=1}^{k} \sigma_t\left(\prod_{s=1}^{r} A_s\right) &= \prod_{t=1}^{k} \sigma_t((A_1 A_2) A_3 \cdots A_r) \\ &\leqslant \prod_{t=1}^{k} \sigma_t(A_1 A_2) \sigma_t(A_3) \cdots \sigma_t(A_r)\end{aligned}$$

$$\leqslant \prod_{t=1}^{k} \sigma_t(A_1)\sigma_t(A_2)\sigma_t(A_3)\cdots\sigma_t(A_r)$$

$$= \prod_{t=1}^{k} \prod_{s=1}^{r} \sigma_t(A_s), 1\leqslant k\leqslant n$$

这就用数学归纳法证明了不等式(5.4.12)成立. □

定理 5.4.7 设 $A,B\in Q^{n\times n}$,则

$$\sum_{t=1}^{k} \sigma_t(A)\sigma_{n-t+1}(B)\leqslant \sum_{t=1}^{k} \sigma_t(AB) \leqslant \sum_{t=1}^{k} \sigma_t(A)\sigma_t(B), 1\leqslant k\leqslant n \tag{5.4.13}$$

证 由定理 5.4.6 及定理 5.1.12 即得. □

定理 5.4.8 设 $A_s\in Q^{n\times n}, s=1,\cdots,m$,则

$$\sum_{t=1}^{k} \sigma_t\left(\prod_{s=1}^{m} A_s\right)\leqslant \sum_{t=1}^{k} \prod_{s=1}^{m} \sigma_t(A_s), 1\leqslant k\leqslant n \tag{5.4.14}$$

证 由定理 5.4.6 的推论及定理 5.1.12 即得. □

定理 5.4.9 设 $A,B\in Q^{n\times n}$,则

$$\sum_{s=1}^{k} \sigma_s(A+B)\leqslant \sum_{s=1}^{k} (\sigma_s(A)+\sigma_s(B)), k=1,\cdots,n \tag{5.4.15}$$

证 由定理 4.2.7 知,分别存在 $U_1,U_2,V_1,V_2\in U^{n\times n}$,使

$$A=U_1^* \operatorname{diag}(\sigma_1(A),\cdots,\sigma_n(B))V_1$$

$$B=U_2^* \operatorname{diag}(\sigma_1(B),\cdots,\sigma_n(B))V_2$$

对 $\forall\, U,V\in U^{n\times n}$,记

$$\begin{aligned} W &= (w_{ij}) = U^*(A+B)V^* \\ &= (V_1V)^* \operatorname{diag}(\sigma_1(A),\cdots,\sigma_n(A))(U_1V) \\ &\quad + (U_2U)^* \operatorname{diag}(\sigma_1(B),\cdots,\sigma_n(B))(V_2V) \\ &= P+Q \end{aligned}$$

其中 $P=(p_{ij})=(U_1U)^*\operatorname{diag}(\sigma_1(A),\cdots,\sigma_1(A))(V_1V)$

$Q=(q_{ij})=(U_2U)^*\operatorname{diag}(\sigma_1(A),\cdots,\sigma_n(B))(V_2V)$

注意 $U_1U,U_2U,V_1V,V_2V\in U^{n\times n}$,则由定理 5.4.1 及定理 4.2.9,有

$$\sum_{s=1}^{k}|\delta_s(P)|\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(P)=\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A),k=1,\cdots,n$$

$$\sum_{s=1}^{k}|\delta_s(Q)|\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(Q)=\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(B),k=1,\cdots,n$$

于是由上两式,有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\sum_{s=1}^{k}p_{ss})&\leqslant|\operatorname{Re}(\sum_{s=1}^{k}p_{ss})|\leqslant\sum_{s=1}^{k}|\operatorname{Re}(p_{ss})|\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}|p_{ss}|\leqslant\sum_{s=1}^{k}|\delta_s(P)|\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A)\end{aligned}\qquad①$$

$$\operatorname{Re}(\sum_{s=1}^{k}q_{ss})\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(B)\qquad②$$

从而由式①,②,有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\sum_{s=1}^{k}w_{ss})&=\operatorname{Re}(\sum_{s=1}^{k}p_{ss})+\operatorname{Re}(\sum_{s=1}^{k}q_{ss})\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}(\sigma_s(A)+\sigma_s(B))\end{aligned}$$

再由上式及定理 5.4.5,即得

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A+B)&=\max_{W\in U(A+B)}\{\operatorname{Re}\sum_{s=1}^{k}w_{ss}\}\\&\leqslant\sum_{s=1}^{k}(\sigma_s(A)+\sigma_s(B))\end{aligned}\qquad\square$$

推论 设 $A_s\in Q^{n\times n},1\leqslant s\leqslant m$,则

$$\sum_{s=1}^{k} \sigma_s\left(\sum_{s=1}^{m} A_s\right) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \sum_{s=1}^{m} \sigma_t(A_s), 1 \leqslant k \leqslant n \quad (5.4.16)$$

证 利用定理 5.4.9 采用数学归纳法即可证得. □

定理 5.4.10 设 $A_t \in Q^{n\times n}, p_t > 0, t=1,\cdots,m, \frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=1$,则

$$\sum_{s=1}^{k} \left|\delta_s\left(\prod_{t=1}^{m} A_t\right)\right| \leqslant \sum_{s=1}^{k} \delta_s\left(\prod_{t=1}^{m} A_t\right)$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{p_t} \sum_{s=1}^{k} \lambda_s\left((A_t A_t^*)^{\frac{p_t}{2}}\right), 1 \leqslant k \leqslant n \quad (5.4.17)$$

证 由式(5.4.1),(5.4.14)及杨格不等式(5.2.7),有

$$\sum_{s=1}^{k} \left|\delta_s\left(\prod_{t=1}^{m} A_t\right)\right| \leqslant \sum_{s=1}^{k} \sigma_s\left(\prod_{t=1}^{m} A_t\right)$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{k} \prod_{t=1}^{m} \sigma_s(A_t)$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{p_t} \sum_{s=1}^{k} \sigma_s^{p_t}(A_t), 1 \leqslant k \leqslant n$$

又 $\sigma_s^{p_t}(A_t) = (\sigma_s^2(A_t))^{\frac{p_t}{2}} = \lambda_s^{\frac{p_t}{2}}(A_t A_t^*) = \lambda_s((A_t A_t^*)^{\frac{p_t}{2}})$

于是由上两式即知(5.4.17)成立. □

在定理 5.4.10 中取 $A_t \in SC_n(Q)$,则得

推论 1 设 $A_t \in SC_n(Q), p_t > 0, t=1,\cdots,m, \frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=1$,则

$$\sum_{s=1}^{k} \left|\delta_s\left(\prod_{t=1}^{m} A_t\right)\right| \leqslant \sum_{s=1}^{k} \sigma_s\left(\prod_{t=1}^{m} A_t\right)$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{p_t} \sum_{s=1}^{k} \lambda_s^{p_t}(A_t), 1 \leqslant k \leqslant n. \quad (5.4.18)$$

在定理 5.4.10 中，取 $m=2$，可得

推论 2 设 $A,B\in Q^{n\times n}$，$p,q>0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$\sum_{s=1}^{k}|\delta_s(AB)|\leqslant\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(AB)$$

$$\leqslant\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{k}\lambda_s((AA^*)^{\frac{p}{2}})+\frac{1}{q}\sum_{s=1}^{k}\lambda_s((BB^*)^{\frac{q}{2}}),1\leqslant k\leqslant n \tag{5.4.19}$$

定理 5.4.11 设 $A_{st}\in Q^{n\times n}$，$\alpha_t>0$，$s=1,\cdots,l$，$t=1,\cdots,m$，则对任意正整数 $k\leqslant n$，

1° 当 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\left|\delta_r(\prod_{t=1}^{m}A_{st})\right|\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\delta_r(\prod_{t=1}^{m}A_{st})$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{m}\sigma_r(A_{st})\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^{\alpha_t}(A_{st})\right]^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant\sum_{t=1}^{l}\frac{1}{\alpha_t}\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^{\alpha_t}(A_{st}) \tag{5.4.20}$$

2° 当 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}>1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\left|\delta_r(\prod_{t=1}^{m}A_{st})\right|\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\delta_r(\prod_{t=1}^{m}A_{st})$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{m}\sigma_r(A_{st})\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^{\alpha_t}(A_{st})\right]^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant\left[\alpha\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{\alpha_t}\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^{\alpha_t/\alpha}(A_{st})\right]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{5.4.21}$$

3° 当 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}<1$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\left|\delta_r(\prod_{t=1}^{m}A_{st})\right|\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\delta_r(\prod_{t=1}^{m}A_{st})$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \prod_{t=1}^{m} \sigma_r(A_{st})$$

$$\leqslant (lk)^{1-\frac{1}{\alpha}} \prod_{t=1}^{m} \left[\sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{\alpha_t}(A_{st}) \right]^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant \min \left\{ (lk)^{1-\frac{1}{\alpha}} \prod_{t=1}^{m} \sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A_{st}), \right.$$

$$\left. (lk)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left[\alpha \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{\alpha_t} \sum_{s=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{\alpha_t}(A_{st}) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \tag{5.4.22}$$

证 由定理 5.4.1,定理 5.4.8,Hölder 不等式(5.2.17)′及杨格不等式(5.2.5),可得式(5.4.20).由定理 5.4.1,定理 5.4.8,Hölder 不等式(5.2.17)′及杨格不等式(5.2.6)可得式(5.4.21).由定理 5.4.1,定理 5.4.8,Hölder 不等式(5.2.14),琴生不等式(5.2.10)及杨格不等式(5.2.6),即得(5.4.22). □

在定理 5.4.11 中令 $l=1$,可得

推论 1 设 $A_t \in Q^{n\times n}$, $\alpha_t >$, $t=1,\cdots,m$,则对任意正整数 $k \leqslant n$,

1° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}\geqslant 1$ 时,有

$$\sum_{r=1}^{k} \left| \delta_r\left(\prod_{t=1}^{m} A_t\right) \right| \leqslant \sum_{r=1}^{k} \sigma_r\left(\prod_{t=1}^{m} A_t\right)$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{k} \prod_{t=1}^{m} \sigma_r(A_t)$$

$$\leqslant \prod_{t=1}^{m} \left[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{\alpha_t}(A_t) \right]^{\frac{1}{\alpha_t}},$$

$$\leqslant \left[\alpha \prod_{t=1}^{m} \frac{1}{\alpha_t} \sum_{r=1}^{k} \sigma_1^{\alpha_t}(A_t) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{5.4.23}$$

2° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}\leqslant 1$ 时,有

$$\sum_{r=1}^{k}\left|\delta_r(\prod_{t=1}^{m}A_t)\right|\leqslant\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(\prod_{t=1}^{m}A_t)$$
$$\leqslant\sum_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{l}\sigma_r(A_t)$$
$$\leqslant k^{1-\frac{1}{\alpha}}\prod_{t=1}^{m}\left[\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^{\alpha_t}(A_t)\right]^{\frac{1}{\alpha_t}},$$
$$\leqslant k^{1-\frac{1}{\alpha}}\prod_{t=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(A_t) \tag{5.4.24}$$

3° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}\geqslant 1$且$\frac{1}{\alpha_t}\leqslant 1(1\leqslant t\leqslant m)$时,有

$$\sum_{r=1}^{k}\left|\delta_r(\prod_{t=1}^{m}A_t)\right|\leqslant\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(\prod_{t=1}^{m}A_t)$$
$$\leqslant\sum_{r=1}^{k}\prod_{t=1}^{m}\sigma_r(A_t)$$
$$\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^{\alpha_t}(A_t)\right]^{\frac{1}{\alpha_t}},$$
$$\leqslant\prod_{t=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}\sigma_1(A_t) \tag{5.4.25}$$

在定理 5.4.11 中令 $m=2$,可得

推论 2 设 $A_s,B_s\in Q^{n\times n}$, $s=1,\cdots,l$, $p,q>0$,则对任意正整数 $k\leqslant n$,

1° 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\alpha}>1$时,有

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}|\delta_r(A_sB_s)|\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(A_sB_s)$$
$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(A_s)\sigma_r(B_s)$$
$$\leqslant\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_1{}^{p}(A_s)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^{q}(B_s)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left[\frac{\alpha}{p}\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_1{}^p(A_s)+\frac{\alpha}{q}\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^q(B_s)\right]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{5.4.26}$$

2° 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\alpha}\leqslant 1$时,有

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}|\delta_r(A_sB_s)|\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(A_sB_s)$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(A_s)\sigma_r(B_s)$$

$$\leqslant(lk)^{1-\frac{1}{\alpha}}\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(A_s)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^q(B_s)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant(lk)^{1-\frac{1}{\alpha}}\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(A_s)\right]\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(B_s)\right] \tag{5.4.27}$$

3° 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1,\frac{1}{p}\leqslant 1,\frac{1}{q}\leqslant 1$时,有

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}|\delta_r(A_sB_s)|\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(A_sB_s)$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(A_s)\sigma_r(B_s)$$

$$\leqslant\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(A_s)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^q(B_s)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(A_s)\right]\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(B_s)\right] \tag{5.4.28}$$

在定理 5.4.11 中,令 $m=k,l=1$,可得

推论 3 设 $A,B\in Q^{n\times n}$,$p,q>0$,则对任意正整数 $k\leqslant n$,

1° 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\alpha}\geqslant 1$时,有

$$\sum_{r=1}^{k}|\delta_r(AB)|\leqslant\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(AB)$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A)\sigma_r(B)$$

$$\leqslant \Big[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^k(A) \Big]^{\frac{1}{p}} \Big[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^q(B) \Big]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \Big[\frac{\alpha}{p} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^p(A) + \frac{\alpha}{q} \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^q(B) \Big]^{\frac{1}{q}} \tag{5.4.29}$$

2° 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\alpha}\leqslant 1$时，有

$$\sum_{r=1}^{k} |\delta_r(AB)| \leqslant \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(AB)$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A)\sigma_r(B)$$

$$\leqslant k^{1-\frac{1}{\alpha}} \Big[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^p(A) \Big]^{\frac{1}{p}} \Big[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^q(B) \Big]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant k^{1-\frac{1}{\alpha}} \Big[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A) \Big] \Big[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^q(B) \Big] \tag{5.4.30}$$

3° 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1, \frac{1}{p}\leqslant 1, \frac{1}{q}\leqslant 1$时，有

$$\sum_{r=1}^{k} |\delta_r(AB)| \leqslant \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(AB)$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(A)\sigma_r(B)$$

$$\leqslant \Big[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^p(A) \Big]^{\frac{1}{p}} \Big[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^q(B) \Big]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \Big[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^p(A) \Big] \Big[\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^q(B) \Big] \tag{5.4.31}$$

定理 5.4.12 设 $A_{st}\in Q^{n\times n}$, $1\leqslant s\leqslant l$, $1\leqslant t\leqslant m$, $p\geqslant 1$,则

$$\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(A_{st})\right]^{\frac{1}{p}},1\leqslant k\leqslant n \tag{5.4.32}$$

证 由定理 5.4.9 之推论,即式(5.4.16)和闵可夫斯基不等式(5.2.37),即得

$$\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_1{}^p\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\left(\sum_{t=1}^{m}\sigma_r(A_{st})\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\sum_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(A_{st})\right]^{\frac{1}{p}},1\leqslant k\leqslant n$$ □

在定理 5.4.12 中,令 $m=2$,可得

推论 1 设 $A_s,B_s\in Q^{n\times n}$, $1\leqslant s\leqslant l$, $p\geqslant 1$,则

$$\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(A_s+B_s)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(A_s)\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(B_s)\right]^{\frac{1}{p}},1\leqslant k\leqslant n \tag{5.4.33}$$

在定理 5.4.12 中,令 $l=1$, $m=2$,可得

推论 2 设 $A,B\in Q^{n\times n}$, $p\geqslant 1$,则

$$\left[\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(A+B)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left[\sum_{r=1}^{k}\sigma_r{}^p(A)\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(B)\right]^{\frac{1}{p}},1\leqslant k\leqslant n \tag{5.4.34}$$

定理 5.4.13 设 $A,B\in Q^{n\times n}$,且 A,B 均可逆,则

$$\left[\sum_{s=1}^{k}\sigma_s{}^2(A)\right]\left[\sum_{s=1}^{k}\sigma_{n-s+1}^2(B)\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\sigma_1(A)\sigma_{n-s+1}(B)}{\sigma_k(A)\sigma_n(B)}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\sigma_k(A)\sigma_n(B)}{\sigma_1(A)\sigma_{n-k+1}(B)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$\cdot\left[\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(A)\sigma_{n-s+1}(B)\right]^2$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\sigma_1(A)\sigma_{n-k+1}(B)}{\sigma_k(A)\sigma_n(B)}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\sigma_k(A)\sigma_n(B)}{\sigma_1(A)\sigma_{n-k+1}(B)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$\cdot\left[\sum_{s=1}^{k}\sigma_s(AB)\right]^2 \tag{5.4.35}$$

证 由定理 5.4.7 与 Po'lya-Szego 不等式(5.2.40)即得. □

§5.5 四元数矩阵迹的不等式(Ⅰ)

矩阵的迹作为矩阵的一个数值特征,我们已在第四章中讨论过四元数矩阵的迹的定义及有关性质,本章将在此基础上给出四元数矩阵的乘积与和的迹的一系列不等式.

定理 5.5.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)\leqslant|\mathrm{tr}A|\leqslant\sum_{s=1}^{n}\sigma_s(A) \tag{5.5.1}$$

特别当 A 为自共轭半正定阵时,有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)=\mathrm{tr}A=\sum_{s=1}^{n}\sigma_s(A)=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A) \tag{5.5.2}$$

证 设 $A=(a_{ij})$,在式(5.4.1)中令 $k=n$,则有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)\leqslant|\mathrm{tr}A|=\left|\sum_{s=1}^{n}a_{ss}\right|\leqslant\sum_{s=1}^{k}|\delta_s(A)|\leqslant\sum_{s=1}^{n}\sigma_s(A)$$

故式(5.5.1)成立. □

定理 5.5.2 设 $A\in SC_n(Q)$,$P\in Q^{m\times n}$,则

1° $(\mathrm{tr}PAP^*)^2\leqslant\mathrm{tr}A^2(\mathrm{tr}PP^*)^2$ (5.5.3)

2° 当 $A\geqslant 0$ 时,有

$$\mathrm{tr}A^2 \leqslant (\mathrm{tr}A)^2 \tag{5.5.4}$$

$$\mathrm{tr}PAP^* \leqslant \mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}PP^* \tag{5.5.4$'$}$$

证 1° 由 $A \in SC_n(Q)$ 及定理 4.1.14 知，存在 $U \in U^{n\times n}$，使

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)U^*$$

其中 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

令
$$PU = B = (b_{ij}) \in Q^{n\times m}$$

则
$$PAP^* = B\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)B^* \in Q^{m\times m}$$

于是由柯西—施瓦兹不等式(5.2.27)及琴生不等式(5.2.9)，有

$$\begin{aligned}
(\mathrm{tr}PAP^*)^2 &= \Big(\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} b_{st}\lambda_t\bar{b}_{st}\Big)^2 \\
&= \Big(\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} \lambda_t N(b_{st})\Big)^2 \\
&= \Big(\sum_{t=1}^{n} \lambda_t \sum_{s=1}^{m} N(b_{st})\Big)^2 \\
&\leqslant \sum_{t=1}^{n} \lambda_t^2 \sum_{t=1}^{n} \Big(\sum_{s=1}^{m} N(b_{st})\Big)^2 \\
&\leqslant \sum_{t=1}^{n} \lambda_t^2 \Big(\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} N(b_{st})\Big)^2 \\
&= \mathrm{tr}A_t^2(\mathrm{tr}BB^*)^2 = \mathrm{tr}A^2(\mathrm{tr}PP^*)^2
\end{aligned}$$

故式(5.5.3)成立. □

2° 当 $A \geqslant 0$ 时，有 $\lambda_s \geqslant 0, s = 1, \cdots, n$，且

$$\mathrm{tr}A^2 = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 \leqslant (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)^2 = (\mathrm{tr}A)^2$$

故式(5.5.4)成立，再由式(5.5.3)及(5.5.4)即得式(5.5.4)$'$成立. □

定理 5.5.2$'$ 设 $A \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，且 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3^* \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}$，则

$$(\mathrm{tr}A_3A_3^*)^2 \leqslant \mathrm{tr}A_1^2(\mathrm{tr}A_2)^2 \tag{5.5.5}$$

$$\mathrm{tr}A_3A_3{}^* \leqslant \mathrm{tr}A_1\mathrm{tr}A_2 \tag{5.5.6}$$

证 由定理 4.3.3,可设 $A=SS^*$, $S=\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}\in Q^{n\times n}$,则

$$A=\begin{pmatrix}CC^* & CD^*\\ DC^* & DD^*\end{pmatrix},\text{又 } A=\begin{pmatrix}A_1 & A_3{}^*\\ A_3 & A_2\end{pmatrix},$$

于是有 $A_1=CC^*$, $A_2=DD^*$, $A_3=DC^*$,从而由式(5.5.3)及定理 4.3.19,定理 4.2.12,得

$$\begin{aligned}(\mathrm{tr}A_3A_3{}^*)^2 &= (\mathrm{tr}DC^*CD^*)^2\\ &\leqslant \mathrm{tr}(C^*C)^2(\mathrm{tr}DD^*)^2\\ &= \mathrm{tr}(CC^*)^2(\mathrm{tr}DD^*)^2\\ &= \mathrm{tr}A_1{}^2(\mathrm{tr}A_2)^2\end{aligned}$$

故式(5.5.5)成立.

由 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,及定理 4.3.8 知 A_1 也是半正定自共轭阵,则由式(5.5.4),有

$$\mathrm{tr}A_1{}^2\leqslant(\mathrm{tr}A_1)^2$$

从而由上式及式(5.5.5)即得式(5.5.6). □

定理 5.5.3 设 $A,B,C\in SC_n(Q)$, $A>0$, $B\geqslant C\geqslant 0$,则

$$\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A+B)^{-1}B]\geqslant\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A+C)^{-1}C] \tag{5.5.7}$$

证 由 $\mathrm{tr}[(A+B)^{-1}B]=\mathrm{tr}[(A+B)^{-1}(A+B-A)]$

$$=\mathrm{tr}I_n-\mathrm{tr}[(A+B)^{-1}A]$$

且由 $B\geqslant C\geqslant 0$, $A>0$,可得

$$(A+B)^{-1}\leqslant(A+C)^{-1}$$

故有

$$\mathrm{tr}[A^{\frac{1}{2}}(A+B)^{-1}A^{\frac{1}{2}}]\leqslant\mathrm{tr}[A^{\frac{1}{2}}(A+C)A^{\frac{1}{2}}]$$

从而由定理 4.2.10,得

$$\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A+B)^{-1}A]\leqslant\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A+C)^{-1}A]$$

由上可得

$$\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A+B)^{-1}B]=\mathrm{Re}[\mathrm{tr}I_n-\mathrm{tr}((A+B)^{-1}A)]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Re}(\mathrm{tr} I_n) - \mathrm{Re}[\mathrm{tr}((A+B)^{-1}A)] \\
&\geqslant \mathrm{Re}(\mathrm{tr} I_n) - \mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A+C)^{-1}A] \\
&= \mathrm{Re}[\mathrm{tr} I_n - \mathrm{tr}((A+C)^{-1}A)] \\
&= \mathrm{Re}[(\mathrm{tr}((A+C)^{-1}C)].
\end{aligned}
$$
□

定理 5.5.4 设 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$m$ 为正整数，则

$$
\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB)^m] \leqslant \mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A^m B^m)] \tag{5.5.8}
$$

证 由式(4.3.22)，有

$$
\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB)^m] = \mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})^m \quad ①
$$

因$(A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})^m \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，故由定理 4.3.6 即式(4.3.5)及式(4.3.21)，(5.3.26)，(4.2.27)，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})^m &= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s((A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})^m) \\
&= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s((AB)^m) \\
&\leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A^m B^m) \\
&= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s((A^m)^{\frac{1}{2}} B^m (A^m)^{\frac{1}{2}}) \\
&= \mathrm{tr}((A^m)^{\frac{1}{2}} B^m (A^m)^{\frac{1}{2}}) \\
&= \mathrm{Re}[\mathrm{tr}((A^m)^{\frac{1}{2}} B^m (A^m)^{\frac{1}{2}})] \\
&= \mathrm{Re}[\mathrm{tr}((A^m)^{\frac{1}{2}} (A^m)^{\frac{1}{2}} B^m)] \\
&= \mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A^m B^m)] \quad ②
\end{aligned}
$$

由式①，②即得式(5.5.8)． □

注 不等式(5.5.8)是 Bellman 在 1980 年世界第二届不等式会议上对正定对称矩阵所提出的猜想之一，即

$$
\mathrm{tr}(AB)^m \leqslant \mathrm{tr}(A^m B^m),\ m \in N
$$

在四元数矩阵上的表现形式．

定理 5.5.5 设 $P\in Q^{n\times n}, A\in SC_n(Q), p,q\in R^+$,则

1° $$\sum_{s=1}^{n}\lambda_{n-s-1}(A)\lambda_s(PP^*)\leqslant \mathrm{tr}PAP^*\leqslant \sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(PP^*) \tag{5.5.9}$$

2° 当 $p>1, q>1$,且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1$ 时,有

$$|\mathrm{tr}PAP^*|\leqslant[\mathrm{tr}(A^2)^{p/2}]^{\frac{1}{p}}[\mathrm{tr}(PP^*)^q]^{\frac{1}{q}} \tag{5.5.10}$$

3° 当 $p>1, q>1$,且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=r\leqslant 1$ 时,有

$$|\mathrm{tr}PAP^*|\leqslant n^{1-r}[\mathrm{tr}(A^2)^{p/2}]^{\frac{1}{p}}[\mathrm{tr}(PP^*)^q]^{\frac{1}{q}} \tag{5.5.11}$$

证 1°在定理 5.3.13 中令 $k=n$ 即得(5.5.9)式.

2° 由 $A\in SC_n(Q)$,则 $A^2\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,且由命题 5.3.1 知

$$\lambda_s((A^2)^{p/2})=\lambda_s^{p/2}(A^2), s=1,\cdots,n$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A^2)^{p/2}&=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{p/2}(A^2)\\&=\sum_{s=1}^{n}|\lambda_s(A)|^p=\sum_{s=1}^{n}|\lambda_{n-s+1}(A)|^p\end{aligned} \tag{①}$$

$$\mathrm{tr}(PP^*)^q=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^q(PP^*) \tag{②}$$

从而由 Hölder 不等式(5.2.22)及式①,②,有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{s=1}^{n}\lambda_{n-s+1}(A)\lambda_s(PP^*)\right|\\\leqslant&\sum_{s=1}^{n}|\lambda_{n-s+1}(A)|\lambda_s(PP^*)\\\leqslant&\left[\sum_{s=1}^{n}|\lambda_{n-s+1}(A)|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^q(PP^*)\right]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$=[\mathrm{tr}(A^2)^{p/2}]^{\frac{1}{p}}[\mathrm{tr}(PP^*)^q]^{\frac{1}{q}} \qquad ③$$

$$\left|\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(PP^*)\right|$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{n}|\lambda_s(A)|\lambda_s(PP^*)$$

$$\leqslant\left[\sum_{s=1}^{n}(\lambda_s(A)^p)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^q(PP^*)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$=[\mathrm{tr}(A^2)^{p/2}]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^q(PP^*)\right]^{\frac{1}{q}} \qquad ④$$

从而由式③,④及(5.5.9),即知式(5.5.10)成立. □

3° 由 Hölder 不等式(5.2.23)仿上 2° 证明即可证得式(5.5.11). □

定理 5.5.6 设 $A,B\in SC_n(Q)$,则

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_{n-s+1}(B)\leqslant\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(B) \tag{5.5.12}$$

证 由 $A\in SC_n(Q)$ 及定理 4.1.14 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$A=U\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))U^*$$

现取实数 x 满足:$\lambda_s(A)+x=\lambda_s(A+xI)>0,1\leqslant s\leqslant n$,则有

$$A+xI=U\Lambda U^*,\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1(A)+x,\cdots,\lambda_n(A)+x)$$

于是由定理 4.2.10,有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)+x\mathrm{tr}B &=\mathrm{Re}[\mathrm{tr}((A+xI)B)]\\ &=\mathrm{Re}[\mathrm{tr}((A+xI)^{\frac{1}{2}}(A+xI)^{\frac{1}{2}}B)]\\ &=\mathrm{Re}[\mathrm{tr}((A+xI)^{\frac{1}{2}}B(A+xI)^{\frac{1}{2}})]\\ &=\mathrm{tr}[(A+xI)^{\frac{1}{2}}B(A+xI)^{\frac{1}{2}}]\end{aligned}$$

又由定理 5.3.10,有

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_{n-s+1}(B)+x\text{tr}B$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_{n-s+1}(B)+x\sum_{s=1}^{n}\lambda_{n-s+1}(B)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A+xI)\lambda_{n-s+1}(B)$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s((A+xI)B)=\text{Re}(\text{tr}((A+xI)B))$$

$$=\text{tr}((A+xI)^{\frac{1}{2}}B(A+xI)^{\frac{1}{2}})$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A+xI)\lambda_s(B)=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(B)+x\text{tr}B \qquad ②$$

由式①,②即知式(5.5.12)成立. □

定理 5.5.7 设 $A,B,C\in SC_n(Q)$,且 $B=C-A$,则

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^2(B)=\text{tr}B^2\geqslant\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s(C)-\lambda_s(A)]^2 \qquad (5.5.13)$$

证 由 $CA=(AC)^*$ 知

$$\text{tr}(AC+CA)=2\text{Re}(\text{tr}AC)$$

于是由上式及式(5.5.12),有

$$\text{tr}B^2=\text{tr}(C^2+A^2-CA-AC)$$

$$=\text{tr}C^2+\text{tr}A^2-\text{tr}(AC+CA)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^2(C)+\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^2(A)-2\text{Re}(\text{tr}AC)$$

$$\geqslant\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s^2(C)+\lambda_s^2(A)-2\lambda_s(C)\lambda_s(A)]$$

$$=\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s(C)-\lambda_s(A)]^2$$

□

定理 5.5.8 设 $A_t\in Q^{n\times n}$, $p_t>0$, $t=1,\cdots,m$, $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=1$,则

$$|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t| \leqslant \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{p_t}\mathrm{tr}(AA^*)^{\frac{p_t}{2}} \tag{5.5.14}$$

证 在定理 5.4.10 中令 $k=n$,即得. □

在定理 5.5.8 中,取 $A_t \in SC_n(Q)$,即得

推论 1 设 $A_t \in SC_n(Q)$, $p_t>0$, $t=1,\cdots,m$, $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=1$,则

$$|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t| \leqslant \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{p_t}\mathrm{tr}A^{p_t} \tag{5.5.15}$$

在定理 5.5.8 中,令 $m=2$,可得

推论 2 设 $A,B\in Q^{n\times n}$, $p,q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则

$$|\mathrm{tr}AB| \leqslant \frac{1}{p}\mathrm{tr}(AA^*)^{\frac{p}{2}}+\frac{1}{q}\mathrm{tr}(AA^*)^{\frac{q}{2}} \tag{5.5.16}$$

特别当 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则由式(5.5.16),可得

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB) \leqslant |\mathrm{tr}AB| \leqslant \frac{1}{p}\mathrm{tr}A^p+\frac{1}{q}\mathrm{tr}A^q \tag{5.5.17}$$

若在(5.4.17)中令 $p=q=\frac{1}{2}$,可知,当 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$时,有

$$2\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB) \leqslant \mathrm{tr}A^2+\mathrm{tr}B^2 \tag{5.5.18}$$

或

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A-B)^2) \geqslant 0, \tag{5.5.19}$$

定理 5.5.9 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B>2$,则

$$\sqrt{\mathrm{tr}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\mathrm{tr}B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\mathrm{Retr}AB}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{s=1}^{N}[\lambda_s(A)+\lambda_s(B)]^2} < \frac{1}{2}(\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B) \tag{5.5.20}$$

证 由式(4.3.20)及在式(5.3.14)中取 $k=2$,在式(5.5.11)中取 $p=q=2$,得

$$\mathrm{tr}A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}=\mathrm{tr}B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\left[\mathrm{tr}A^2+\mathrm{tr}B^2+2\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s(A)+\lambda_s(B)]^2$$

由 $A^2(\geqslant 0)\in SC_n(Q)$及定理 4.3.6 之 2°易知

$$\mathrm{tr}A^2=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^2(A)\leqslant(\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A))^2$$

且等号成立当且仅当 $\mathrm{rank}A\leqslant 1$,这样当 $\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B>2$ 时,有

$$\mathrm{tr}A^2+\mathrm{tr}B^2<(\mathrm{tr}A)^2+(\mathrm{tr}B)^2$$

又

$$0\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\lambda_s(B)\leqslant\left[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(A)\right]\cdot\left[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(B)\right]=\mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}B$$

即知

$$\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s(A)+\lambda_s(B)]^2<(\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B)^2$$

故式(5.5.20)得证. □

定理 5.5.10 设 $A_{st}\in Q^{n\times n}$, $\alpha_t>0$, $s=1,\cdots,l$, $t=1,\cdots,m$,则

1° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=1$时,有

$$\sum_{s=1}^{l}\mathrm{Re}\left[\mathrm{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]\leqslant\left|\sum_{s=1}^{l}\mathrm{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\left|\mathrm{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right|\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l}\mathrm{tr}(A_{st}A_{st}^*)^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{\alpha_t}\sum_{s=1}^{l}\mathrm{tr}(A_{st}A_{st}^*)^{\frac{\alpha_t}{2}}\tag{5.5.21}$$

2° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}>1$时,有

$$\sum_{s=1}^{l}\operatorname{Re}\left[\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]\leqslant\left|\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right|\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}(A_{st}A_{st}^{*})^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant\left[\alpha\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{\alpha_t}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}(A_{st}A_{st}^{*})^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.5.22}$$

3° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}<1$时，有

$$\sum_{s=1}^{l}\operatorname{Re}\left[\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]\leqslant\left|\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right|\leqslant(nl)^{1-\frac{1}{\alpha}}\prod_{t=1}^{l}\left[\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}(A_{st}A_{st}^{*})^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant\min\left\{(nl)^{1-\frac{1}{\alpha}}\prod_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}(A_{st}A_{st}^{*})^{\frac{1}{2}},\right.$$

$$\left.(nl)^{1-\frac{1}{\alpha}}\left[\alpha\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{\alpha_t}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}(A_{st}\cdot A_{st}^{*})^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{5.5.23}$$

证 在定理5.4.11中，令$k=n$，即得. □

在定理5.5.10中，若取诸$A_{st}\in SC_n(Q)$，则有$A_{st}A_{st}^{*}=A_{st}^{2}$，于是可得

推论1 设$A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$\alpha_t>0$，$s=1,\cdots,l$；$t=1,\cdots,m$，则

1° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=1$时，有

$$\sum_{s=1}^{l}\operatorname{Re}\left[\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]\leqslant\left|\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right|\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{\alpha_t} \sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t} \tag{5.5.24}$$

2° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}>1$时,有

$$\sum_{s=1}^{l} \mathrm{Re}\left[\mathrm{tr}\left(\prod_{t=1}^{m} A_{st}\right)\right] \leqslant \left|\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr}\left(\prod_{t=1}^{m} A_{st}\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{l} \left|\mathrm{tr}\left(\prod_{t=1}^{m} A_{st}\right)\right| \leqslant \prod_{t=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{\alpha_t} \sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{5.5.25}$$

3° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}<1$时,有

$$\sum_{s=1}^{l} \mathrm{Re}\left[\mathrm{tr}\left(\prod_{t=1}^{m} A_{st}\right)\right] \leqslant \left|\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr}\left(\prod_{t=1}^{m} A_{st}\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{l} \left|\mathrm{tr} \prod_{t=1}^{m} A_{st}\right| \leqslant (nl)^{1-\frac{1}{\alpha}} \prod_{t=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant \min\left\{(nl)^{1-\frac{1}{\alpha}} \sum_{t=1}^{m} \sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}, (nl)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left[\frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{\alpha_t} \sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\} \tag{5.5.26}$$

在推论 1 中令 $l=1$,可得

推论 2 设 $A_t \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_t>0$, $t=1,\cdots,m$,则

1° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=1$时,有

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{tr} \prod_{t=1}^{m} A_{st}\right) \leqslant \left|\mathrm{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t\right| \leqslant \prod_{t=1}^{m} \left(\mathrm{tr} A_t^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{\alpha_t} \mathrm{tr} A_t^{\alpha_t} \tag{5.5.27}$$

2° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}>1$时,有

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t\right)\leqslant\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t\right|\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_t^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{\alpha}\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{\alpha_t}\operatorname{tr}A_t^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{5.5.28}$$

3° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}<1$时,有

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\left(\prod_{t=1}^{m}A_t\right)\right)\leqslant\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t\right|\leqslant n^{1-\frac{1}{\alpha}}\prod_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant\min\left\{n^{1-\frac{1}{\alpha}}\prod_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t,\ n^{1-\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{1}{\alpha}\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{\alpha_t}\operatorname{tr}A_t^{\alpha_t}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\} \tag{5.5.29}$$

由推论 2,可得

推论 3 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_t>0$, $t=1,\cdots,m$,则

1° 当$\alpha_1+\cdots+\alpha_m\geqslant 1$时,有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\alpha_t}\right|\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_t\right)^{\alpha_t} \tag{5.5.30}$$

2° 当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r<1$时,有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\alpha_t}\right|\leqslant n^{1-r}\prod_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_t\right)^{\alpha_t} \tag{5.5.31}$$

证 由命题 5.4.1 知,$A_t^{\alpha_t}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,令 $\beta_t=\frac{1}{\alpha_t}(t=1,\cdots,m)$,则$\frac{1}{\beta_1}+\cdots+\frac{1}{\beta_m}\geqslant 1$,于是由推论 2 之 1°,2°,有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\alpha_t}\right|\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\operatorname{tr}(A^{\alpha_t})^{\beta_t}\right]^{\frac{1}{\beta_t}}=\prod_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A\right)^{\alpha_t}$$

故 1°成立.同理可证 2°. □

在推论 3 中,令 $\alpha_1=\cdots=\alpha_m=\alpha$,可得

推论 4 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $t=1,\cdots,m$, $\alpha>0$,则

1° 当 $\alpha \geqslant \frac{1}{m}$ 时，有

$$\left|\operatorname{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t^{\alpha}\right| \leqslant \left(\prod_{t=1}^{m} \operatorname{tr} A_t\right)^{\alpha} \tag{5.5.32}$$

2° 当 $0<\alpha \leqslant \frac{1}{m}$ 时，有

$$\left|\operatorname{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t^{\alpha}\right| \leqslant n^{1-m\alpha} \left(\prod_{t=1}^{m} \operatorname{tr} A_t\right)^{\alpha} \tag{5.5.33}$$

在推论 4 中，分别令 $\alpha=\frac{1}{m}, m, 1$，可得

推论 5 设 $A_t \in SC_n^{\geqslant}(Q), t=1,\cdots,m$，则

1° $$\left|\operatorname{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t^{\frac{1}{m}}\right| \leqslant \left(\prod_{t=1}^{m} \operatorname{tr} A_t\right)^{\frac{1}{m}} \tag{5.5.34}$$

2° $$\left|\operatorname{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t^{m}\right| \leqslant \left(\prod_{t=1}^{m} \operatorname{tr} A_t\right)^{m} \tag{5.5.34$'$}$$

3° $$\left|\operatorname{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t\right| \leqslant \prod_{t=1}^{m} \operatorname{tr} A_t \tag{5.5.35}$$

推论 6 设 $A_t \in SC_n^{\geqslant}(Q), t=1,\cdots,m$，则

$$\left|\operatorname{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t\right| \leqslant n^{m-1} \sum_{s=1}^{n} \prod_{t=1}^{m} \lambda_s(A_t) \tag{5.5.36}$$

证 由式(5.5.35)及切比雪夫不等式(5.2.42)，有

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{tr} \prod_{t=1}^{m} A_t\right| &\leqslant \prod_{t=1}^{m} \operatorname{tr} A_t = \prod_{t=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(A_t) \\ &\leqslant n^{m-1} \sum_{s=1}^{n} \prod_{t=1}^{m} \lambda_s(A_t)\end{aligned}$$

故式(5.5.36)成立. □

在推论 2 中，令 $m=2$，可得

推论 7 设 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则

1° 当 $p, q>0$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geqslant 1$ 时，有

$$|\mathrm{tr}AB|\leqslant(\mathrm{tr}A^p)^{\frac{1}{p}}(\mathrm{tr}B^q)^{\frac{1}{q}} \tag{5.5.37}$$

2° 当$p,q>0$且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=r\leqslant 1$时,有

$$|\mathrm{tr}AB|\leqslant n^{1-r}(\mathrm{tr}A^p)^{\frac{1}{p}}(\mathrm{tr}B^q)^{\frac{1}{p}} \tag{5.5.38}$$

在推论 7 中,分别令 $p=q=2$,与 $p=q=1$,可得

推论 8 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)\leqslant|\mathrm{tr}AB|\leqslant(\mathrm{tr}A^2)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{tr}B^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5.5.39}$$

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)\leqslant|\mathrm{tr}AB|\leqslant\mathrm{tr}A\ \mathrm{tr}B \tag{5.5.39$'$}$$

注 Richurd Bellman 在 1980 年世界第二届不等式会议上对正定实对称阵提出不等式(常称为 Bellman 不等式)

$$\mathrm{tr}AB\leqslant(\mathrm{tr}A^2)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{tr}B^2)^{\frac{1}{2}}$$

式(5.5.39)是上述不等式在四元数半正定自共轭阵上的推广,而定理 5.5.10 及其推论是 Bellman 不等式更普遍的推广.

定理 5.5.11 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_t\in R^+$, $t=1,\cdots,m$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=1$,则

$$\left|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\alpha_t}\right|\leqslant\mathrm{tr}\sum_{t=1}^{m}\alpha_tA_t \tag{5.5.40}$$

证 由式(5.5.30)及杨格不等式(5.2.4)即得式(5.5.40). □

注 不等式(5.5.40)是杨格不等式在四元数矩阵迹中的推广.

在定理 5.5.11 中,令 $m=1$,可得

定理 5.5.12 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $t=1,\cdots,m$,则

1° $$\left|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\frac{1}{m}}\right|\leqslant\mathrm{tr}\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}A_t \tag{5.5.41}$$

2° $$\left|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t\right|\leqslant\mathrm{tr}\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}A_t^m \tag{5.5.42}$$

3° $$\left|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t\right|^{\frac{1}{m}}\leqslant\mathrm{tr}\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}A_t \tag{5.5.43}$$

4° $\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t\right| \leqslant \min\left\{\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} A_t^{m}, \left(\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} A_t\right)^{m}\right\}$

(5.5.44)

证 1° 在定理 5.5.11 中令 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_m=\frac{1}{m}$ 即得式(5.5.41).

2° 在 1°中把 A_t 换成 $A_t^{\frac{1}{m}}$ 即得式(5.5.42).

3° 由式(5.5.35)及几何—算术平均值不等式即得式(5.5.43).

4° 由式(5.5.42)及(5.5.43)即得式(5.5.44). □

注 1 式(5.5.41),(5.5.43)均可视为几何—算术平均值不等式在四元数矩阵迹上的推广.

注 2 可以举出例子说明 $\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} A_t^{m}$, $(\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} A_t)^m$ 之间没有必然的大小关系.

例如:设 $A_1=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A_3=\cdots=A_8=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $m=8$,则

$$\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} A_t^{m}=\frac{1}{8}\left[3^8+6(\frac{2}{3})^8+1\right]$$

$$>1=\left[\frac{1}{8}\operatorname{tr}\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]^8=\left[\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} A_t\right]^m$$

又设 $A_1=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $m=2$,则有

$$\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m} A_t^{m}=\frac{1}{2}[3^2+(1+2^2)]=7$$

$$<9=\left[\frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right]^2=\left[\frac{1}{m}\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{m}A_t\right]^m$$

定理 5.5.13 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$t=1,\cdots,m$，则

$$\max\left\{\begin{array}{l}\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A^m\right|^{\frac{1}{m}},\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t\right|,\\ \left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\frac{1}{m}}\right|^m\end{array}\right\}\leqslant\prod_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t \tag{5.5.45}$$

证 由定理 5.5.10 的推论 5 即得.

注 可以举例子证明，$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A^m\right|^{\frac{1}{m}}$，$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A^t\right|$，$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\frac{1}{m}}\right|^m$ 三者之间没有必然的大小关系.

例 1 取 $A_t=I$，$t=1,\cdots,m(\geqslant 2)$，且 $n\geqslant 2$，则有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^m\right|^{\frac{1}{m}}=n^{\frac{1}{m}}<n=\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A^t\right|$$

若取 $m=2$，$A_1=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^m\right|^{\frac{1}{m}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}>\frac{3}{2}=\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t\right|$$

例 2 取 $A_t=I$，$t=1,\cdots,m(\geqslant 2)$，且 $n\geqslant 2$，则有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^m\right|^{\frac{1}{m}}=n^{\frac{1}{m}}<n^m=\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\frac{1}{m}}\right|^m$$

若取 $m=2$，$A_1=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^m\right|^{\frac{1}{m}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\right)^2=\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{\frac{1}{m}}\right|^m$$

例 3 取 $A_t=I, t=1,\cdots,m(\geqslant 2)$，且 $n\geqslant 2$，则有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t\right|=n<n^n=\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{\frac{1}{m}}\right|^m$$

取 $A_1=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}, m=2$，则有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t\right|=\frac{3}{2}>\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{\frac{1}{m}}\right|^m$$

上述三例表明，$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^m\right|^{\frac{1}{m}}$ 与 $\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t\right|$，$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^m\right|^{\frac{1}{m}}$ 与 $\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{\frac{1}{m}}\right|^m$，$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t\right|$ 与 $\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m} A_t^{\frac{1}{m}}\right|^m$ 之间没有必然的大小关系.

定理 5.5.14 设 $A\in SC_n(Q), \alpha\in R$，则

1° 当 $A\geqslant 0, \alpha\geqslant 1$ 时，有

$$n^{1-\alpha}(\operatorname{tr}A)^\alpha\leqslant \operatorname{tr}A^\alpha\leqslant(\operatorname{tr}A)^\alpha \tag{5.5.46}$$

2° 当 $A\geqslant 0, 0<\alpha\leqslant 1$ 时，有

$$(\operatorname{tr}A)^\alpha\leqslant \operatorname{tr}A^\alpha\leqslant n^{1-\alpha}(\operatorname{tr}A)^\alpha \tag{5.5.47}$$

3° 当 $A>0, \alpha\leqslant 0$ 时，有

$$\operatorname{tr}A^\alpha\geqslant n^{1-\alpha}(\operatorname{tr}A)^\alpha \tag{5.5.48}$$

证 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，由命题 5.3.1 之 3° 知 $\lambda_1^\alpha,\cdots,\lambda_n^\alpha$ 是 A^α 的特征值，于是由定理 4.3.6 之 2°，再分别利用不等式(5.2.28)，(5.2.29)，(5.2.30)即可得式(5.5.46)，(5.5.47)，(5.5.48).

□

在定理 5.5.14 中令 α 分别为 $m, \frac{1}{m}, -\frac{1}{m}, -m, -1$,可得

推论 设 $A \in SC_n(Q)$, $m \in N$,则

1° 当 $A \geqslant 0$ 时,有

$$n^{1-m}(\mathrm{tr}A)^m \leqslant \mathrm{tr}A^m \leqslant (\mathrm{tr}A)^m \tag{5.5.49}$$

$$(\mathrm{tr}A)^{\frac{1}{m}} \leqslant \mathrm{tr}A^{\frac{1}{m}} \leqslant n^{1-\frac{1}{m}}(\mathrm{tr}A)^{\frac{1}{m}} \tag{5.5.50}$$

2° 当 $A > 0$ 时,有

$$\mathrm{tr}A^{-\frac{1}{m}} \geqslant n^{1+\frac{1}{m}}(\mathrm{tr}A)^{-\frac{1}{m}} \tag{5.5.51}$$

$$\mathrm{tr}A^{-m} \geqslant n^{m+1}(\mathrm{tr}A)^{-m} \tag{5.5.52}$$

$$(\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}A^{-1}) \geqslant n^2 \tag{5.5.53}$$

定理 5.5.15 设 $A_s \in SC_n(Q)$, $s = 1, \cdots, l$,则

1° 当 $A_t \geqslant 0$, $t = 1, \cdots, l$, $\alpha \geqslant 1$ 时,有

$$\sum_{t=1}^{l} \mathrm{tr}A_s^{\alpha} \leqslant \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr}A_s\right)^{\alpha} \tag{5.5.54}$$

2° 当 $A_t \geqslant 0$, $s = 1, \cdots, l$, $0 < \alpha \leqslant 1$ 时,有

$$\sum_{t=1}^{l} \mathrm{tr}A_s^{\alpha} \leqslant (nl)^{1-\alpha}\left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr}A_s\right)^{\alpha} \tag{5.5.55}$$

3° 当 $A_t > 0$, $s = 1, \cdots, l$, $\alpha \leqslant 0$ 时,有

$$\sum_{t=1}^{l} \mathrm{tr}A_s^{\alpha} \geqslant (nl)^{1-\alpha}\left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr}A_s\right)^{\alpha} \tag{5.5.56}$$

4° 当 $A_s > 0$, $s = 1, \cdots, l$ 时,有

$$\frac{nl}{\mathrm{tr}A_1^{-1} + \cdots + \mathrm{tr}A_l^{-1}} \leqslant \frac{\mathrm{tr}A_1 + \cdots + \mathrm{tr}A_l}{nl} \tag{5.5.57}$$

证 在定理 5.5.10 的推论 1 中,令 $m = 1$,由其中的式(5.5.24)及(5.5.25),可得

$$\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr}A_s \leqslant \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr}A_s^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad ①$$

在式①中把 A_s 换成 $A_s^{\frac{1}{\alpha}}$，再把 $\frac{1}{\alpha}$ 换成 α 即得式(5.5.54)，同理由式(5.5.26)可得式(5.5.55). 由式(5.5.48)及(5.2.30)可得式(5.5.56). 在式(5.5.56)中令 $\alpha=-1$，即得式(5.5.57). □

注 式(5.5.55)是调和—算术平均值不等式在四元数矩阵迹上的推广. 但须注意，经典的调和—几何平均值不等式不能直接推广到四元数矩阵迹上来，即下述不等式

$$\frac{l}{\mathrm{tr}A_1^{-1}+\cdots+\mathrm{tr}A_l^{-1}}\leqslant\sqrt[l]{|\mathrm{tr}A_1\cdots A_l|} \tag{$*$}$$

在四元数矩阵迹上一般不再成立. 比如，令

$$A_1=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}3&-3&0\\-3&4&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{5.5.58}$$

则不难验证 A_1,A_2,A_3 均为正定实对称阵(当然更是四元数自共轭正定阵). 容易算得:

$$A_1A_2A_3=\begin{pmatrix}-15&25&0\\-9&14&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则 $\mathrm{tr}A_1A_2A_3=-15+14+1=0$，但 $\mathrm{tr}A_1^{-1}+\mathrm{tr}A_2^{-1}+\mathrm{tr}A_3^{-1}>0$，故此时，不等式($*$)不成立，此反例也说明调和—几何平均值不等式即使在实对称正定阵中一般也是不成立的.

定理 5.5.16 设 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$\alpha_t>0$，$s=1,\cdots,l$，$t=1,\cdots,m$，则

1° 当 $\alpha_t\geqslant 1$，$t=1,\cdots,m$，且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r$ 时，有

$$\left|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha t}\right|\leqslant(nl)^{r-m}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}\mathrm{tr}A_{st}^{\alpha t} \tag{5.5.59}$$

2° 当 $\alpha_t\leqslant 1$，$t=1,\cdots,m$，且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r$ 时，有

$$\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\right|\leqslant n^{m-r}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}{}^{\alpha t} \tag{5.5.60}$$

证 1° 由式(5.5.35),(5.5.46),(5.5.28),(5.5.46)可得

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\right| &\leqslant \prod_{t=1}^{m}\operatorname{tr}\left(\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\\ &\leqslant \prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}\right)^{\alpha_t}\\ &\leqslant \prod_{t=1}^{m} l^{\alpha_t-1}\sum_{s=1}^{l}(\operatorname{tr}A_{st})^{\alpha_t}\\ &= l^{r-m}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}(\operatorname{tr}A_{st})^{\alpha_t}\\ &\leqslant l^{r-m}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}n^{\alpha_t-1}\operatorname{tr}A_{st}{}^{\alpha_t}\\ &= l^{r-m}\cdot n^{r-m}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}{}^{\alpha_t}\\ &= (nl)^{r-m}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}{}^{\alpha_t}\end{aligned}$$

故式(5.5.57)成立.

2° 由式(5.5.35),(5.5.47),(5.2.29),(5.5.47),可得

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\right| &\leqslant \prod_{t=1}^{m}\operatorname{tr}\left(\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\\ &\leqslant \prod_{t=1}^{m}n^{1-\alpha_t}\left(\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\\ &= n^{m-r}\prod_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}A_{st}\right)^{\alpha_t}\\ &= n^{m-r}\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}\right)^{\alpha_t}\end{aligned}$$

$$\leqslant n^{m-r}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}(\mathrm{tr}A_{st})^{\alpha_t}$$

$$\leqslant n^{m-r}\prod_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}\mathrm{tr}A_{st}^{\alpha_t}$$

故式(5.5.58)成立. □

在定理 5.5.16 中,令 $m=1$,可得

推论 1 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q),\alpha>0,s=1,\cdots,l$,

1° 当$\alpha\geqslant1$时,有

$$\mathrm{tr}\Big(\sum_{s=1}^{l}A_s\Big)^{\alpha}\leqslant(nl)^{\alpha-1}\sum_{s=1}^{l}\mathrm{tr}A_s^{\alpha}\qquad(5.5.61)$$

2° 当$0<\alpha\leqslant1$时,有

$$\mathrm{tr}\Big(\sum_{s=1}^{l}A_s\Big)^{\alpha}\leqslant n^{1-\alpha}\sum_{s=1}^{l}\mathrm{tr}A_s^{\alpha}\qquad(5.5.62)$$

在定理 5.5.16 中,令 $l=1$,可得

推论 2 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q),\alpha_t>0,t=1,\cdots,m$,则

1° 当$\alpha_t\geqslant1,t=1,\cdots,m,\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r$ 时,有

$$\Big|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\alpha_t}\Big|\leqslant n^{r-m}\prod_{t=1}^{m}\mathrm{tr}A_{st}^{\alpha_t}\qquad(5.5.63)$$

2° 当 $\alpha_t\leqslant1,t=1,\cdots,m,\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r$ 时,有

$$\Big|\mathrm{tr}\prod_{t=1}^{m}A_t^{\alpha_t}\Big|\leqslant n^{m-r}\prod_{t=1}^{m}\mathrm{tr}A_t^{\alpha_t}\qquad(5.5.64)$$

在推论 1 中令 $l=2$,可得

推论 3 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q),\alpha>0$,则

1° 当$\alpha\geqslant1$时,有

$$\mathrm{tr}(A+B)^{\alpha}\leqslant(2n)^{\alpha-1}(\mathrm{tr}A^{\alpha}+\mathrm{tr}B^{\alpha})\qquad(5.5.65)$$

特别当 $\alpha=2$ 时,有

$$\mathrm{tr}(A+B)^{2}\leqslant2n(\mathrm{tr}A^{2}+\mathrm{tr}B^{2})\qquad(5.5.66)$$

2° 当$0<\alpha\leqslant1$时,有

$$\operatorname{tr}(A+B)^{\alpha} \leqslant n^{1-\alpha}(\operatorname{tr}A^{\alpha}+\operatorname{tr}B^{\alpha}) \tag{5.5.67}$$

特别当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时,有

$$\operatorname{tr}\sqrt{A+B} \leqslant \sqrt{n}(\operatorname{tr}\sqrt{A}+\operatorname{tr}\sqrt{B}) \tag{5.5.68}$$

在推论 2 中,令 $m=2$,可得

推论 4 设 $A, B \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha>0$,则

1° 当 $p, q \geqslant 1$ 时,有

$$|\operatorname{tr}A^{p}B^{q}| \leqslant n^{p+q-2}\operatorname{tr}A^{p}\operatorname{tr}B^{q} \tag{5.5.69}$$

特别当 $p=q=2$ 时,有

$$|\operatorname{tr}A^{2}B^{2}| \leqslant n^{2}\operatorname{tr}A^{2}\operatorname{tr}B^{2} \tag{5.5.70}$$

2° 当 $p, q \leqslant 1$ 时,有

$$|\operatorname{tr}A^{p}B^{q}| \leqslant n^{2-p-q}\operatorname{tr}A^{p}\cdot\operatorname{tr}B^{q} \tag{5.5.71}$$

特别当 $p=q=\frac{1}{2}<1$ 时,有

$$\left|\operatorname{tr}\sqrt{A}\sqrt{B}\right| \leqslant n\operatorname{tr}\sqrt{A}\cdot\operatorname{tr}\sqrt{B} \tag{5.5.72}$$

定理 5.5.17 设 $A_s \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $s=1,\cdots,m$, $r>0$,则

1° 当 $r \geqslant 2$ 时,有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}A_s\right)^{r} \geqslant \sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}A_s^{r}+[(mn)^{r}-mn]\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{r}{mn}} \tag{5.5.73}$$

2° 当 $0<r \leqslant \frac{1}{2}$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}A_s^{r} \geqslant \left|\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}A_s+[(mn)^{\frac{1}{r}}-mn]\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{mn}}\right|^{r} \tag{5.5.74}$$

证 1° 由琴生不等式的加强不等式(5.2.12),有

$$\left[\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A_s)\right]^{r} \geqslant \sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}[\lambda_t(A_s)]^{r}$$

$$+[(mn)^r-mn][\prod_{t=1}^{m}\prod_{t=1}^{n}\lambda_t(A_s)]^{\frac{r}{mn}} \quad ①$$

由命题 5.3.1 知

$$\lambda_t(A_s^r)=[\lambda_t(A_s)]^r,1\leqslant s<m_s,1\leqslant t\leqslant n. \quad ②$$

又由定理 4.3.6,有

$$\mathrm{tr}A_s=\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A_s),\quad \mathrm{tr}A_s^r=\sum_{t=1}^{n}\lambda_t(A_s^r) \quad ③$$

$$|A_s|=\prod_{t=1}^{n}\lambda_t(A_s),1\leqslant s\leqslant m \quad ④$$

从而由式①,②,③,④即得式(5.5.73).同理可证式(5.5.74). □

在定理 5.5.17 中令 $m=1$,可得

推论 设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$r\in R^+$,则

1° 当 $r\geqslant 2$ 时,有

$$(\mathrm{tr}A)^r\geqslant \mathrm{tr}A^r+(n^r-n)|A|^{\frac{r}{n}} \quad (5.5.75)$$

2° 当 $0<r\leqslant\frac{1}{2}$ 时,有

$$\mathrm{tr}A^r\geqslant[\mathrm{tr}A+(n^{\frac{1}{r}}-n)|A|^{\frac{1}{n}}]^r \quad (5.5.76)$$

定理 5.5.18 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_s>0,s=1,\cdots,m$,则

1° 当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m\geqslant 1$ 时,有

$$\prod_{s=1}^{m}\mathrm{tr}A_s^{\alpha_s}\leqslant n^{m-1}\prod_{s=1}^{m}(\mathrm{tr}A_s)^{\alpha_s} \quad (5.5.77)$$

2° 当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=\alpha<1$ 时,有

$$\prod_{s=1}^{m}\mathrm{tr}A_s^{\alpha_s}\leqslant n^{m-\alpha}\prod_{s=1}^{m}(\mathrm{tr}A_s)^{\alpha_s} \quad (5.5.78)$$

证 设 $\lambda_{1s}\geqslant\lambda_{2s}\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{ns}\geqslant 0$ 是 $A_s(1\leqslant s\leqslant m)$的 n 个特征值,则由命题 5.3.1 知,$\lambda_{1s}^{\alpha_s}\geqslant\lambda_{2s}^{\alpha_s}\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{ns}^{\alpha_s}$ 是 $A_s^{\alpha_s}$ 的 n 个特征值.于是由切比雪夫不等式(5.2.42)及赫尔德不等式(5.2.17),有

$$\prod_{s=1}^{m}\mathrm{tr}A_s^{\alpha_s}=\prod_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\lambda_{ts}^{\alpha_s}$$

$$\leqslant n^{m-1}\sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{m}\lambda_{ts}^{\alpha_s}$$

$$\leqslant n^{m-1}\prod_{s=1}^{m}\left(\prod_{t=1}^{n}\lambda_{ts}\right)^{\alpha_s}$$

$$= n^{m-1}\prod_{s=1}^{m}(\mathrm{tr}A_s)^{\alpha_s}$$

故式(5.5.77)成立.

同理,由切比雪夫不等式(5.2.42)及赫尔德不等式(5.2.18),即可得式(5.5.78). □

在定理 5.5.18 中,令 $\alpha_1=\cdots=\alpha_m=\alpha$,可得

推论 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $s=1,\cdots,m$, $\alpha\geqslant\frac{1}{m}$,则

$$\prod_{s=1}^{m}\mathrm{tr}A_t^{\alpha}\leqslant n^{m-1}\left(\prod_{s=1}^{m}\mathrm{tr}A_s\right)^{\alpha} \tag{5.5.79}$$

特别在式(5.5.79)中令 $\alpha=\frac{1}{m}$,可得

$$\mathrm{tr}\sqrt[m]{A_1}\cdot\mathrm{tr}\sqrt[m]{A_2}\cdots\mathrm{tr}\sqrt[m]{A_m}\leqslant n^{m-1}\sqrt[m]{\mathrm{tr}A_1\cdots\mathrm{tr}A_m} \tag{5.5.80}$$

定理 5.5.19 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $s=1,\cdots,m$, $1<\alpha<\beta$,则

$$\min_{1\leqslant s\leqslant m}\{\lambda_n(A_s)\}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{mn}}$$

$$\leqslant\frac{1}{n^{\beta}}\left(\mathrm{tr}\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}A_s^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\max_{1\leqslant s\leqslant m}\{\lambda_1(A_s)\} \tag{5.5.81}$$

证 设 A_s 的 n 个特征值 $\lambda_{1s}\geqslant\lambda_{2s}\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{ns}$, $1\leqslant s\leqslant m$,则由几何—算术平均值不等式及命题 5.2.2,有

$$\min_{1\leqslant s\leqslant m}\{\lambda_{ns}\}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{n}\lambda_{ts}\right)^{\frac{1}{mn}}\leqslant\left(\frac{\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\lambda_{ts}}{mn}\right)$$

$$\leqslant\left(\frac{\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\lambda_{ts}^{\alpha}}{mn}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant\left(\frac{\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\lambda_{ts}^{\beta}}{mn}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\max_{1\leqslant s\leqslant m}\{\lambda_{1s}\}$$

由此即得不等式(5.5.81). □

在定理 5.5.19 中,令 $m=1$,可得

推论 设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$1<\alpha<\beta$,则

$$\lambda_n(A)\leqslant|A|^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\operatorname{tr}A\leqslant n^{-\frac{1}{\alpha}}(\operatorname{tr}A^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$\leqslant n^{-\frac{1}{\beta}}(\operatorname{tr}A^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\lambda_1(A) \tag{5.5.82}$$

定理 5.5.20 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$s=1,\cdots,m$,则

$$\min_{1\leqslant s\leqslant m}\{\lambda_n(A_s)\}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{mn}}\leqslant\cdots$$
$$\leqslant\frac{1}{n^k}\operatorname{tr}\left(\frac{\sqrt[k]{A_1}+\cdots+\sqrt[k]{A_m}}{m}\right)^k\leqslant\cdots$$
$$\leqslant\frac{1}{n^2}\operatorname{tr}\left(\frac{\sqrt{A_1}+\cdots+\sqrt{A_m}}{m}\right)^2$$
$$\leqslant\frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(\frac{A_1+\cdots+A_m}{m}\right)$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{tr}\sqrt{\frac{A_1{}^2+\cdots+A_m{}^2}{m}}\leqslant\cdots$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt[k]{n}}\operatorname{tr}\sqrt[k]{\frac{A_1{}^k+\cdots+A_m{}^k}{m}}\leqslant\cdots$$
$$\leqslant\max_{1\leqslant s\leqslant m}\{\lambda_1(A_s)\} \tag{5.5.83}$$

证 由幂平均不等式(5.2.45)即得. □

定理 5.5.21 设 $A_t\in Q^{n\times n}$,$\alpha_t>0$,$t=1,\cdots,m$,记 $B=A_1\cdot\cdots\cdot A_m$,则

1° 当 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}\geqslant1$ 时,有

$$\operatorname{tr}\left(\frac{B+B^*}{2}\right)\leqslant\operatorname{tr}(B^*B)^{\frac{1}{2}}\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left[\operatorname{tr}(A_t{}^*A_t)^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha_t}} \tag{5.5.84}$$

2° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=\frac{1}{\alpha}\leqslant 1$时，有

$$\mathrm{tr}\left(\frac{B+B^*}{2}\right)\leqslant \mathrm{tr}(B^*B)^{\frac{1}{2}}\leqslant n^{1-\frac{1}{\alpha}}\prod_{t=1}^{m}\left[\mathrm{tr}(A_t^*A_t)^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha_t}} \tag{5.5.85}$$

证 由式(4.2.29),(5.4.1),有

$$\mathrm{tr}\left(\frac{B+B^*}{2}\right)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B)=\mathrm{Re}\sum_{s=1}^{n}\delta_s(B)$$
$$\leqslant \sum_{s=1}^{n}\sigma_s(B)=\mathrm{tr}(B^*B)^{\frac{1}{2}}$$

由式(5.4.14)及 Hölder 不等式(5.2.17)′，有

$$\sum_{s=1}^{n}\sigma_s(B)=\sum_{s=1}^{n}\sigma_s\left(\prod_{t=1}^{m}A_t\right)\leqslant \sum_{s=1}^{n}\prod_{t=1}^{m}\sigma_s(A_t)$$
$$\leqslant \prod_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{n}\sigma_s^{\alpha_t}(A_t)\right]^{\frac{1}{\alpha_t}}$$
$$=\prod_{t=1}^{m}\left[\mathrm{tr}(A_t^*A_t)^{\frac{\alpha_t}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

故式(5.5.84)成立.同理由式(5.4.14)及 Hölder 不等式(5.2.18)即知式(5.5.85)成立. □

推论 设 $A_t\in Q^{n\times n}$, $t=1,\cdots,m$, $r\in N$, $r\leqslant m$，记 $B=A_1\cdot\cdots\cdot A_m$，则

$$\mathrm{tr}\left(\frac{B+B^*}{2}\right)\leqslant \mathrm{tr}(B^*B)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \prod_{t=1}^{m}\left[\mathrm{tr}(A_t^*A_t)^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1}{r}}$$
$$\leqslant \left[\frac{1}{m}\mathrm{tr}\sum_{t=1}^{m}(A_t^*A_t)^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{m}{r}} \tag{5.5.86}$$

证 令 $\alpha_t=\frac{1}{r}(t=1,\cdots,m)$，由 $r\leqslant m$，则有 $\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{r}=\frac{m}{r}\geqslant 1$，

故由式(5.5.84)知,式(5.5.86)的前两个不等号成立.再由几何一算术平均值不等式即知最后一个不等号亦成立. □

定理 5.5.22 设 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_t>0$, $s=1,\cdots,l$, $t=1,\cdots,m$,则

1° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}\geqslant 1$时,有

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\leqslant\left|\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right|$$
$$\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}\tag{5.5.87}$$

2° 当$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}=r\leqslant 1$时,有

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right)\leqslant\left|\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right|$$
$$\leqslant(nl)^{1-r}\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}\tag{5.5.88}$$

证 1° 由式(5.5.27),(5.5.28)及 Hölder 不等式(5.2.17)′,有

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right|\leqslant\sum_{s=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right|$$
$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\prod_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$
$$\leqslant\prod_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

故式(5.5.87)成立.

2° 由式(5.5.29)及 Hölder 不等式(5.2.18)′,有

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{s=1}^{l}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right|\leqslant\sum_{s=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\prod_{t=1}^{m}A_{st}\right|$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{l} n^{1-r} \prod_{t=1}^{m} (\mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t})^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$= n^{1-r} \sum_{s=1}^{l} \prod_{t=1}^{m} (\mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t})^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$\leqslant n^{1-r} \cdot l^{1-r} \prod_{t=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

$$= (nl)^{1-r} \prod_{t=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{\alpha_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_t}}$$

故式(5.5.88)成立. □

在定理 5.5.22 中令 $m=1$,可得

推论 1 设 $A_s \in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$\alpha \in R^+$,则

1° 当$\frac{1}{\alpha} \geqslant 1$时,有

$$\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} A_s \leqslant \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_s^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{5.5.89}$$

2° 当$0<\frac{1}{\alpha} \leqslant 1$时,有

$$\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} A_s \leqslant (nl)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_s^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{5.5.90}$$

在定理 5.5.22 中令 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = m$,可得

推论 2 设 $A_{st} \in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$s=1,\cdots,l$,$t=1,\cdots,m$,则

$$\left|\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} \prod_{t=1}^{m} A_{st}\right| \leqslant \prod_{t=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{l} \mathrm{tr} A_{st}^{m}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{5.5.91}$$

特别在式(5.5.91)中取 $m=2$,可得

$$\left|\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} A_s B_s\right|^2 \leqslant \left(\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} A_s^2\right)\left(\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} B_s^2\right) \tag{5.5.92}$$

$$\left(\mathrm{Re}\left(\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} A_s B_s\right)\right)^2 \leqslant \left(\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} A_s^2\right)\left(\mathrm{tr} \sum_{s=1}^{l} B_s^2\right) \qquad (5.5.92)'$$

注 不等式(5.5.92)与(5.5.92)′可视为柯西不等式在四元数矩阵迹中的推广.

定理 5.5.23 设 $A_{st}\in Q^{n\times n}$, $s=1,\cdots,l$, $t=1,\cdots,m$, $p\geqslant 1$, 则

$$\left\{\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}\left[\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)^{*}\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]^{\frac{p}{2}}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{t=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}(A_{st}{}^{*}A_{st})^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}} \tag{5.5.93}$$

证 因为

$$\sigma_r{}^p\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right) = \left[\sigma_r{}^2\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right]^{\frac{p}{2}} = \left[\lambda_r\left(\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)^{*}\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)\right)\right]^{\frac{p}{2}}$$

其中, $r=1,\cdots,n$, $s=1,\cdots,l$, 于是在定理 5.4.12 中令 $k=n$, 并利用上式即得式(5.5.93). □

在定理 5.5.23 中若诸 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, 可得

推论 1 设 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $s=1,\cdots,l$, $t=1,\cdots,m$, $p\geqslant 1$, 则

$$\left[\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{m}A_{st}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{l}\operatorname{tr}A_{st}{}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.5.94}$$

注 在式(5.5.94)中取 $n=1$, 可得闵可夫斯基不等式(5.2.37), 故式(5.5.94)是闵可夫斯基不等式在四元数矩阵迹上的推广.

在推论 1 中, 取 $l=1$, 即得:

推论 2 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $t=1,\cdots,m$, $p\geqslant 1$, 则

$$\left[\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{m}A_t\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{t=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_t{}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.5.95}$$

特别在式(5.5.95)中分别取 $m=2$, $p=2$, 可得

$$[\mathrm{tr}(A+B)^p]^{\frac{1}{p}} \leqslant (\mathrm{tr}A^p)^{\frac{1}{p}} + (\mathrm{tr}B^p)^{\frac{1}{p}} \tag{5.5.96}$$

$$\sqrt{\mathrm{tr}(A_1+\cdots+A_m)^2} \leqslant \sqrt{\mathrm{tr}A_1{}^2} + \cdots + \sqrt{\mathrm{tr}A_m^2} \tag{5.5.97}$$

定理 5.5.24 设 $A_{st} \in Q^{n\times n}, s=1,\cdots,m, t=1,\cdots,l, p\geqslant 1$，则

$$\begin{aligned}
&\left\{\sum_{s=1}^{m} \mathrm{tr}\left[\left(\sum_{t=1}^{l} A_{st}\right)^* \left(\sum_{t=1}^{l} A_{st}\right)\right]^{\frac{p}{2}}\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \sum_{t=1}^{l} \left[\sum_{s=1}^{m} \mathrm{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \min\left\{\sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{m} [\mathrm{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}}]^{\frac{1}{p}},\right. \\
&\qquad \left.\sum_{t=1}^{l}\left[\sum_{s=1}^{m} (\mathrm{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{1}{2}})^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned} \tag{5.5.98}$$

证 由式(5.5.93)即知式(5.5.98)的左边不等式成立.

当 $p\geqslant 1$ 时，有 $0<\frac{1}{p}\leqslant 1$，于是由式(5.2.10)，有

$$\left[\sum_{s=1}^{m} \mathrm{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{s=1}^{m} [\mathrm{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}}]^{\frac{1}{p}}, t=1,\cdots,l \quad ①$$

于是由式①，有

$$\sum_{t=1}^{l}\left[\sum_{s=1}^{m} \mathrm{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{m} [\mathrm{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}}]^{\frac{1}{p}} \quad ②$$

又由 $p\geqslant 1$ 及式(5.5.46)，有

$$\mathrm{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}} = \mathrm{tr}((A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{1}{2}})^p \leqslant (\mathrm{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{1}{2}})^p$$

于是有

$$\sum_{t=1}^{l}\left[\sum_{s=1}^{m} \mathrm{tr}(A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{t=1}^{l}\left[\sum_{s=1}^{m} \mathrm{tr}((A_{st}{}^* A_{st})^{\frac{1}{2}})^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad ③$$

从而由式②，③，即知式(5.5.98)的右边不等式成立. □

在定理 5.5.24 中取 $S_{st} \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，可得

推论 1 设 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $s=1,\cdots,m$, $t=1,\cdots,l$, $p\geqslant 1$,则

$$\left[\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{l}A_{st}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{t=1}^{l}\left(\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}A_{st}^{\ p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\min\left\{\sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}(\operatorname{tr}A_{st}^{\ p})^{\frac{1}{p}},\ \sum_{t=1}^{l}\left[\sum_{s=1}^{m}(\operatorname{tr}A_{st})^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\}\qquad(5.5.99)$$

在推论 1 中令 $l=2$,可得

推论 2 设 $A_s,B_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $s=1,\cdots,m$, $p\geqslant 1$,则

$$\left[\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}(A_s+B_s)^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}A_s^{\ p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{s=1}^{m}\operatorname{tr}B_s^{\ p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\min\left\{\sum_{s=1}^{m}(\operatorname{tr}A_s^{\ p})^{\frac{1}{p}}+\sum_{s=1}^{m}(\operatorname{tr}B_s^{\ p})^{\frac{1}{p}},\ \left[\sum_{s=1}^{m}(\operatorname{tr}A_s)^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{s=1}^{m}(\operatorname{tr}B_s)^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\}$$

(5.5.100)

定理 5.5.25 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $t=1,\cdots,m$, $p,r>0$,则

1° 当 $p\geqslant 1$, $r\geqslant 1$ 时,有

$$\left[\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{m}A_t^{\ r}\right)\right]^p\leqslant\left(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t\right)^{rp}\qquad(5.5.101)$$

2° 当 $p\leqslant 1$, $r\leqslant 1$ 时,有

$$\left[\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{m}A_t^{\ r}\right)\right]^p\geqslant\left(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t\right)^{rp}\qquad(5.5.102)$$

证 1° 由式(5.5.46)与(5.2.9),有

$$\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{m}A_t^{\ r}\right)^p\leqslant\left[\operatorname{tr}\left(\sum_{t=1}^{m}A_t^{\ r}\right)\right]^p$$

$$=\left(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{tr}A_t^{\ r}\right)^p\leqslant\left[\sum_{t=1}^{m}(\operatorname{tr}A_t)^r\right]^p$$

$$\leqslant \left[\left(\sum_{t=1}^{m} \mathrm{tr} A_t \right)^r \right]^p = \left(\sum_{t=1}^{m} \mathrm{tr} A_t \right)^{rp}$$

故式(5.5.101)成立.

2° 由式(5.5.47)与(5.2.10),有

$$\mathrm{tr}\left(\sum_{t=1}^{m} A_t^r \right)^p \geqslant \left[\mathrm{tr}\left(\sum_{t=1}^{m} A_t^r \right) \right]^p$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{m} \mathrm{tr} A_t^r \right)^p \geqslant \left[\sum_{t=1}^{m} (\mathrm{tr} A_t) \right]^p$$

$$\geqslant \left[\left(\sum_{t=1}^{m} \mathrm{tr} A_t \right)^r \right]^p = \left(\sum_{t=1}^{m} \mathrm{tr} A_t \right)^{rp}$$

故式(5.5.102)成立. □

定理 5.5.26 设 $A, B \in SC_n^{>}(Q)$,则

$$(\mathrm{tr} A^2)(\mathrm{tr} B^2) \leqslant \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\lambda_1(A)\lambda_1(B)}{\lambda_n(A)\lambda_n(B)} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\lambda_n(A)\lambda_n(B)}{\lambda_1(A)\lambda_1(B)} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot (\mathrm{Re}\,\mathrm{tr} AB)^2 \tag{5.5.103}$$

证 因为当 $A, B \in SC_n^{>}(Q)$ 时 $\sigma_s(A) = \lambda_s(A)$, $\sigma_s(B) = \lambda_s(B)$, $s = 1, \cdots, n$,则在定理 5.4.13 中令 $k = n$,即得本定理. □

定理 5.5.27 设 $A_t \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $t = 1, \cdots, m$,则

$$\mathrm{tr}\left(\frac{1}{m} \sum_{t=1}^{m} A_t\right)^2 \leqslant \mathrm{tr}\left(\frac{1}{m} \sum_{t=1}^{m} A_t^2 \right) \tag{5.5.104}$$

证 由式(5.5.39)及几何一算术平均值不等式,有

$$2\mathrm{Re}(\mathrm{tr} AB) \leqslant 2(\mathrm{tr} A^2)^{\frac{1}{2}} (\mathrm{tr} B^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \mathrm{tr} A^2 + \mathrm{tr} B^2$$

于是有

$$2\mathrm{Re}(\mathrm{tr} A_s A_t) \leqslant \mathrm{tr} A_s^2 + \mathrm{tr} A_t^2, \; s, t = 1, \cdots, m$$

从而有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A_s^2 + A_t^2 - 2A_s A_t)) \geqslant 0, \; s, t = 1, \cdots, m$$

进而有

$$\sum_{1\leqslant s<t\leqslant m} \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(A_s^2 + A_t^2 - 2A_sA_t)) \geqslant 0 \qquad ①$$

而
$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\left(\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} A_t^2 - \left(\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} A_t\right)^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{m^2}\sum_{1\leqslant s<t\leqslant m} \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(A_s^2 + A_t^2 - 2A_sA_t)) \qquad ②$$

由式①,②即知,有

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\left(\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} A_t^2 - \left(\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} A_t\right)^2\right)\right) \geqslant 0 \qquad ③$$

注意到$\frac{1}{m}\sum\limits_{t=1}^{m} A_t^2$, $\left(\frac{1}{m}\sum\limits_{t=1}^{m} A_t\right)^2 \in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则由式③即知式(5.5.104)成立. □

注 式(5.5.104)是平方平均不等式在四元数矩阵迹中的推广.

§5.6 四元数矩阵迹的不等式(Ⅱ)

本节主要讨论四元数自共轭矩阵圈积和亚正定矩阵迹的一些不等式.

一、四元数半正定矩阵圈积迹的若干不等式

先回忆一下矩阵圈积的定义:

设 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in Q^{n\times n}$,则 A 与 B 的圈积 $A\circ B$ 定义为

$$A\circ B = C, \quad C=(c_{ij}) \in Q^{n\times n}.$$

其中 $c_{ij} = a_{ij}\cdot b_{ij}$, $i, j = 1, \cdots, n$.

为了方便,我们把 m 个矩阵的圈积 $A_1\circ A_2\circ\cdots\circ A_m$ 简单地

记为$\bigcirc_{j=1}^{m} A_j$，即：

$$\bigcirc_{j=1}^{m} A_j \xlongequal{\triangle} A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_m \tag{5.6.1}$$

定理 5.6.1 设 $A_j \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$\alpha_j \in R^+$，$j=1,\cdots,m$ 且 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = r$，则：

$$|\mathrm{tr} \bigcirc_{j=1}^{m} A_j| \leqslant \prod_{j=1}^{m} (\mathrm{tr} A_j^{r/\alpha_j})^{\alpha_j/r} \tag{5.6.2}$$

或

$$|\mathrm{tr} \bigcirc_{j=1}^{m} A_j^{1/r}|^r \leqslant \prod_{j=1}^{m} (\mathrm{tr} A_j^{1/\alpha_j})^{\alpha_j} \tag{5.6.2$'$}$$

证 因 $A_j \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$j=1,\cdots,m$，则由命题 5.3.1 知，$A_j^{r/\alpha_j} \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$(1 \leqslant j \leqslant m, m \in N)$ 且 $[\lambda_i(A_j)]^{r/\alpha_j}$，$i=1,\cdots,n$ 就是 A_j^{r/α_j} 的 n 个特征值，于是由定理 4.3.6 之 2°有，

$$\mathrm{tr} A_j^{r/\alpha_j} = \sum_{i=1}^{n} [\lambda_i(A_j)]^{r/\alpha_j}, j=1,\cdots,m \tag{①}$$

设 $A_j = (a_{it}^{(j)})_{n \times n}$，$j=1,\cdots,m$，则由式(1.1,29)，有

$$|\mathrm{tr} \bigcirc_{j=1}^{m} A_j| = |\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ii}^{(j)}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} |a_{ii}^{(j)}| \tag{②}$$

注意到 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = r$，则 $\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{r} = 1$，于是由式②及 Hölder 不等式 (5.2.17)′，有

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} |a_{ij}^{(j)}| \leqslant \prod_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}^{(j)}|^{r/\alpha_j})^{\alpha_j/r} \tag{③}$$

由定理 5.4.1，有

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}^{(j)}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(A_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m \tag{④}$$

因 $r/\alpha_j > 1 (1 \leqslant j \leqslant m)$，则由式④与定理 5.1.13，定理 4.2.8 及式

①,知有

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}^{(j)}|^{r/\alpha_j} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i(A_j))^{r/\alpha_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(A_j))^{r/\alpha_j} = \mathrm{tr}A_j^{r/\alpha_j}, j=1,\cdots,m \qquad ⑤$$

于是,由式②,③,⑤即知式(5.6.2)成立. 在式(5.6.2)中把 A_j 换成 $A_j^{1/r}$,即得式(5.6.2)′. □

定理 5.6.2 设 $A_j \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $j=1,\cdots,m$,则

1° 当 $0<\alpha_j\leqslant 1(1\leqslant j\leqslant m)$ 且 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \geqslant 1$ 时,有

$$\left|\mathrm{tr}\bigcirc_{j=1}^{m} A_j\right| \leqslant \prod_{j=1}^{m} (\mathrm{tr}A_j^{1/\alpha_j})^{\alpha_j} \qquad (5.6.3)$$

或

$$\left|\mathrm{tr}\bigcirc_{j=1}^{m} A_j^{\alpha_j}\right| \leqslant \prod_{j=1}^{m} (\mathrm{tr}A_j)^{\alpha_j} \qquad (5.6.3)'$$

2° 当 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = r \leqslant 1$ 时,有

$$\left|\mathrm{tr}\bigcirc_{j=1}^{m} A_j\right| \leqslant n^{1-r} \prod_{j=1}^{m} (\mathrm{tr}A_j^{1/\alpha_j})^{\alpha_j} \qquad (5.6.4)$$

或

$$\left|\mathrm{tr}\bigcirc_{j=1}^{m} A_j^{\alpha_j}\right| \leqslant n^{1-r} \prod_{j=1}^{m} (\mathrm{tr}A_j)^{\alpha_j} \qquad (5.6.4)'$$

证 1° 因 $A_j \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $j=1,\cdots,m$,则由命题 5.3.1 知,$A_j^{1/\alpha_j} \in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$(1\leqslant j\leqslant m)$,且$[\lambda_i(A_j)]^{1/\alpha_j}(i=1,\cdots,n)$就是 A_j^{1/α_j}的 n 个特征值,于是由定理 4.3.2 之 2°有

$$\mathrm{tr}A_j^{1/\alpha_j} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(A_j))^{1/\alpha_j}, j=1,\cdots,m \qquad ①$$

设 $A_j = (a_{ik}^{(j)})_{n\times n}(1\leqslant j\leqslant m)$,则由式(1.1.29)与(1.1.19),有

$$\left|\mathrm{tr}\bigcirc_{j=1}^{m} A_j\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ii}^{(j)}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} |a_{ii}^{(j)}| \qquad ②$$

注意到 $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\geqslant 1$，于是由 Hölder 不等式(5.2.17)′，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}|a_{ij}{}^{(j)}|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ii}{}^{(j)}|^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha_j} \qquad ③$$

由定理 5.4.1(即式(5.4.1))，有

$$\sum_{i=1}^{k}|a_{ii}{}^{(j)}|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(A_j),1\leqslant j\leqslant m,\ 1\leqslant k\leqslant n$$

由 $0<\alpha_j\leqslant 1$ 有 $1/\alpha_j\geqslant 1(1\leqslant j\leqslant m)$，则由上式，定理 5.1.13，定理 4.2.8 及式①，知

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ii}{}^{(j)}|^{1/\alpha_j}\leqslant\sum_{i=1}^{n}[\sigma_i(A_j)]^{1/\alpha_j}=\sum_{i=1}^{n}[\lambda_i(A_j)]^{1/\alpha_j}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A_j{}^{1/\alpha_j})=\mathrm{tr}A_j{}^{1/\alpha_j} \qquad ④$$

从而由式②，③，④，即得

$$|\mathrm{tr}\bigodot_{j=1}^{m}A_j|\leqslant\prod_{j=1}^{m}(\mathrm{tr}A_j{}^{1/\alpha_j})^{\alpha_j} \qquad \square$$

即式(5.6.3)成立. 在(5.6.5)式中把 A_j 换成 $A_j^{\alpha_j}$ 即得式(5.5.3)′.

2° 当 $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i=r\leqslant 1$ 时，由 Hölder 不等式(5.2.18)′，有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(a_{ii}{}^{(j)})\leqslant n^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}{}^{(j)})^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha_j} \qquad ⑤$$

且这时显然有 $0<\alpha_j\leqslant 1$，从而 $1/\alpha_j\geqslant 1(1\leqslant j\leqslant m)$，故式④仍成立. 于是由式②，⑤，④，即得式(5.6.4). 在式(5.6.4)中把 A_j 换成 $A_j^{\alpha_j}$，即得式(5.6.4)′. $\square$

在定理 5.6.2 中，令 $\alpha_j=\alpha(j=1,\cdots,m)$，可得

推论 1 设 $A_j\in SC_n(Q),A_j\geqslant 0,j=1,\cdots,m$，则

1° 当$\frac{1}{m}\leqslant\alpha\leqslant 1$时，有

$$|\mathrm{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j|\leqslant\prod_{j=1}^{m}(\mathrm{tr}A_j^{1/\alpha_j})^{\alpha}\qquad(5.6.5)$$

或

$$|\mathrm{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j^{\alpha}|\leqslant\prod_{j=1}^{m}(\mathrm{tr}A_j)^{\alpha}\qquad(5.6.5)'$$

2° 当$\alpha<\frac{1}{m}$时，有

$$|\mathrm{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j|\leqslant n^{1-m\alpha}\prod_{j=1}^{m}(\mathrm{tr}A_j^{1/\alpha_j})^{\alpha}\qquad(5.6.6)$$

或

$$|\mathrm{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j^{\alpha}|\leqslant n^{1-m\alpha}\prod_{j=1}^{m}(\mathrm{tr}A_j)^{\alpha}\qquad(5.6.6)'$$

3°

$$|\mathrm{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j|\leqslant\prod_{j=1}^{m}(\mathrm{tr}A_j)\qquad(5.6.7)$$

4°

$$|\mathrm{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j|\leqslant\prod_{j=1}^{m}(\mathrm{tr}A_j^{\frac{1}{m}})^{m}\qquad(5.6.8)$$

或

$$|\mathrm{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j^{m}|\leqslant\prod_{j=1}^{m}(\mathrm{tr}A_j)^{m}\qquad(5.6.8)'$$

在定理 5.6.2 中令 $m=2$，可得

推论 2 设 $A,B\in SC_n(Q)$，$A,B\geqslant 0$，$p,q>0$，则

1° 当$\frac{1}{p},\frac{1}{q}\leqslant 1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1$时，有

$$|\mathrm{tr}A\circ B|\leqslant(\mathrm{tr}A^{p})^{\frac{1}{p}}(\mathrm{tr}B^{q})^{\frac{1}{q}}\qquad(5.6.9)$$

2° 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=r<1$时，有

$$|\mathrm{tr}(A\circ B)|\leqslant n^{1-r}(\mathrm{tr}A^{p})^{\frac{1}{p}}(\mathrm{tr}B^{q})^{\frac{1}{q}}\qquad(5.6.10)$$

特别在式(5.6.9)中令 $p=q=2$ 时，有

$$|\mathrm{tr}(A\circ B)|\leqslant(\mathrm{tr}A^{2})^{\frac{1}{2}}(\mathrm{tr}B^{2})^{\frac{1}{2}}\qquad(5.6.11)$$

注 不等式(5.6.11)是贝尔迈(Bellman)不等式在四元数矩阵中的又一推广形式.

定理 5.6.3 设 $A_j \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_j > 0, j=1,\cdots,m, \alpha_1+\cdots+\alpha_m=r$,则

$$\left|\operatorname{tr}\bigodot_{j=1}^{m} A_j^{\alpha_j}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{r} \operatorname{tr} A_j^r \tag{5.6.12}$$

证 由式(5.6.2)及杨格不等式(5.2.5)有

$$\left|\operatorname{tr}\bigodot_{j=1}^{m} A_j\right| \leqslant \prod_{j=1}^{m} (\operatorname{tr} A^{r/\alpha_j})^{\alpha_j/r} \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{r} \operatorname{tr} A_j^{r/\alpha_j}$$

在上式中把 A_j 换成 $A_j^{\alpha_j}$,并利用命题 5.3.1,即得

$$\left|\operatorname{tr}\bigodot_{j=1}^{m} A_j^{\alpha_j}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{r} \operatorname{tr} A_j^r$$ □

在定理 5.6.3 中令 $r=1$,则得

推论 设 $A_j \in SC_n^{\geqslant}(Q), \alpha_j > 0, j=1,\cdots,m$,且 $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$,则

$$\left|\operatorname{tr}\bigodot_{j=1}^{m} A_j^{\alpha_j}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \operatorname{tr} A_j \tag{5.6.13}$$

注 在式(5.6.13)中,令 $m=1$,即得杨格不等式.故式(5.6.13)是杨格不等式在四元数矩阵中的又一推广形式.

定理 5.6.4 设 $A_j \in SC_n^{\geqslant}(Q), j=1,\cdots,m$,则

$$\left|\operatorname{tr}\bigodot_{j=1}^{m} A_j^{\frac{1}{m}}\right| \leqslant \operatorname{tr}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} A_j\right) \tag{5.6.14}$$

$$\left|\operatorname{tr}\bigodot_{j=1}^{m} A_j\right|^{\frac{1}{m}} \leqslant \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \operatorname{tr} A_j \tag{5.6.15}$$

$$\operatorname{tr}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} A_j\right) \geqslant \min\left\{\left|\operatorname{tr}\bigodot_{j=1}^{m} A_j^{\frac{1}{m}}\right|, \left|\operatorname{tr}\bigodot_{j=1}^{m} A_j\right|^{\frac{1}{m}}\right\} \tag{5.6.16}$$

证 在(5.6.13)式中令 $\alpha_i=\frac{1}{m}$ 即得式(5.6.14). 由式(5.6.7)及几何—算术平均值不等式,有

$$\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_j\right|^{\frac{1}{m}}\leqslant\left(\prod_{j=1}^{m}\operatorname{tr}A_j\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\operatorname{tr}A_j$$

故(5.6.15)成立. 由式(5.6.14)与(5.6.15)即得式(5.6.16). □

注 式(5.6.14),(5.6.15)均为几何—算术平均值不等式在四元数矩阵迹中的又两种推广形式.

定理 5.6.5 设 $A_{jt}\in SC_n^{\geqslant}(Q),\alpha_j\in R^+,j=1,\cdots,m,t=1,\cdots,l,\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=r$,则

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_{jt}^{r/\alpha_j}\right)^{\alpha_j/r}\tag{5.6.17}$$

证 由式(1.1.29),定理 5.6.1 及 Hölder 不等式(5.2.17),有

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|&=\left|\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|\leqslant\sum_{t=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|\\&\leqslant\sum_{t=1}^{l}\prod_{j=1}^{m}(\operatorname{tr}A_{jt}^{r/\alpha_j})^{\alpha_j/r}\\&\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_{jt}^{r/\alpha_j}\right)^{\alpha_j/r}\end{aligned}$$

故式(5.6.17)成立. □

在定理 5.6.5 中把 A_j 换成 $A_j^{1/r}$,由命题 5.3.1,可得

推论 设 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q),\alpha_j\in R^+,j=1,\cdots,m,t=1,\cdots,l,\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=r$,则:

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}^{1/r}\right|^{r}\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_{jt}^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha_j}\tag{5.6.18}$$

定理 5.6.6 设 $A_{jt}\in SC_n^{\geqslant}(Q),\alpha_j\in R^+,j=1,\cdots,m,t=1,\cdots,l$,则

1° 当 $0<\alpha_j\leqslant 1(1\leqslant j\leqslant m)$, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_j\geqslant 1$ 时,有

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_{jt}{}^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha_j}\qquad(5.6.19)$$

或

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}{}^{\alpha_j}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_{jt}\right)^{\alpha_j}\qquad(5.6.19)'$$

2° 当 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=r<1$ 时,有

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|\leqslant(n-l)^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_j{}^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha_j}\qquad(5.6.20)$$

或

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}{}^{\alpha_j}\right|\leqslant(n-l)^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_{jt}\right)^{\alpha_j}\qquad(5.6.20)'$$

证 由式(1.1.29),定理 5.6.2 之 1°及 Höhder 不等式(5.2.17)′即得式(5.6.19).

由式(1.1.29),定理 5.6.2 之 2°及 Hölder 不等式(5.2.18)′,有

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|&\leqslant\sum_{t=1}^{l}\left|\operatorname{tr}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|\\&\leqslant n^{1-r}\sum_{t=1}^{l}\prod_{j=1}^{m}\left(\operatorname{tr}A_{jt}{}^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha_j}\\&\leqslant n^{1-r}\cdot l^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_j{}^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha_j}\\&=(nl)^{1-r}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_j{}^{1/\alpha_j}\right)^{\alpha_j}\end{aligned}$$

故式(5.6.20)成立. □

在定理5.6.6中，令 $\alpha_j=\frac{1}{m}(j=1,\cdots,m)$，可得

推论 设 $A_{jt}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$j=1,\cdots,m$，$t=1,\cdots,l$，则

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}\bigcirc_{j=1}^{m}A_{jt}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{l}\operatorname{tr}A_{jt}^{1/m}\right)^{m}\qquad(5.6.21)$$

特别地，在式(5.6.21)中取 $m=2$，即得

$$\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}(A_t\circ B_t)\right|\leqslant\left(\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}A_t^2\right)\left(\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}B_t^2\right)\qquad(5.6.22)$$

或 $$\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}(A_t\circ B_t)\right)\leqslant\left|\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}(A_t\circ B_t)\right|$$

$$\leqslant\left(\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}A_t^2\right)\left(\operatorname{tr}\sum_{t=1}^{l}B_t^2\right)\qquad(5.6.22)'$$

注 不等式(5.6.22)和(5.6.22)′是柯西不等式在四元数矩阵迹的又一推广形式.

二、四元数亚正定矩阵迹的几个不等式

先给出四元数亚正定矩阵的定义：

设 $A\in Q^{n\times n}$，记 $R(A)=\frac{1}{2}(A+A^*)$ $S(A)=\frac{1}{2}(A-A^*)$，则

$$A=R(A)+S(A)\qquad(5.6.23)$$

且 $R(A)\in SC_n(Q)$，$S(A)\in SC_n^-(Q)$，其中 $SC_n^-(Q)=\{A\in Q^{n\times n}\mid A^*=-A\}$ 为斜自共轭矩阵的全体.

定义5.6.1 设 $A\in Q^{n\times n}$，若 $\forall 0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\in Q^{n\times 1}$，有 $\operatorname{Re}(x^*Ax)>0(\geqslant 0)$，则称 A 为四元数亚(半)正定矩阵，n 阶四元数亚(半)正定矩阵的全体记为 $P_n^{>}(Q)(P_n^{\geqslant}(Q))$.

命题5.6.1

1° 若 $A\in P_n^{>}(Q)$，$B\in Q^{n\times n}$ 且可逆，则 $B^*AB\in P_n^{>}(Q)$；

2° 若$A\in P_n^{\geqslant}(Q)$,$B\in Q^{n\times n}$且可逆,则 $B^*AB\in P_n^{\geqslant}(Q)$.

证 1° 由$A\in P_n^{>}(Q)$,则对$\forall\, 0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$,令 $y=Bx$,则因 B 可逆知$y\neq 0$,且 $\mathrm{Re}(y^*Ay)>0$,故

$$\mathrm{Re}(x^*(B^*AB)x)=\mathrm{Re}(y^*Ay)>0$$

因此 $B^*AB\in P_n^{>}(Q)$.

2° 同理可证. □

命题 5.6.2 设 $A\in SC_n^{-}(Q)$,则对$\forall\, x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$,有

$$\mathrm{Re}(x^*Ax)=0 \tag{5.6.24}$$

且有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)=0 \tag{5.6.25}$$

证 由 $A\in SC_n^{-}(Q)$,则 $A^*=-A$,于是对$\forall\, x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$,有$\overline{x^*Ax}=x^*A^*x=-x^*Ax$,故 $\mathrm{Re}(x^*Ax)=0$.即式(5.6.24)成立.

设 $A=(a_{ij})$,由 $A^*=-A$ 有 $a_{ii}=-\overline{a_{ii}}\,(1\leqslant i\leqslant n)$,从而$\overline{a_{ii}}+a_{ii}=0$,故 $\mathrm{Re}(a_{ii})=0$,因此

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)=\mathrm{Re}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(a_{ii})=0$$

故式(5.6.25)成立. □

命题 5.6.3

1° $A\in P_n^{>}(Q)\Leftrightarrow R(A)\in SC_n^{>}(Q)$

2° $A\in P_n^{\geqslant}(Q)\Leftrightarrow R(A)\in SC_n^{\geqslant}(Q)$

证 由式(5.6.23),(5.6.24),有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(x^*Ax)&=\mathrm{Re}(x^*R(A)x+x^*S(A)x)\\&=\mathrm{Re}(x^*R(A)x)+\mathrm{Re}(x^*S(A)x)\\&=\mathrm{Re}(x^*R(A)x)+0=\mathrm{Re}(x^*R(A)x)\\&=x^*R(A)x\end{aligned} \tag{5.6.26}$$

于是,由定义 5.6.1 及式(5.6.26),即知命题成立. □

命题5.6.4 设 $A\in P_n^{>}(Q)$,则存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^*AU=\begin{pmatrix} a_1+b_1\mathrm{i} & & * \\ & \ddots & \\ & & a_n+b_n\mathrm{i}\end{pmatrix},a_t,b_t\in R,a_t>0,b_t\geqslant 0,1\leqslant t\leqslant n, \tag{5.6.27}$$

证 首先由定理4.1.4知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^*AU=\begin{pmatrix} a_1+b_1\mathrm{i} & & * \\ & \ddots & \\ & & a_n+b_n\mathrm{i}\end{pmatrix},a_t,b_t\in R,\ b_t\geqslant 0,1\leqslant t\leqslant n$$

令 $e_t=(0,\cdots 0,1,0,\cdots 0)^{\mathrm{T}}$,1 处在第 t 个位置($t=1,\cdots,n$),并记 $x_t=Ue_t\neq 0$,则由 $A\in P_n^{>}(Q)$,就有

$$\begin{aligned}0<\mathrm{Re}(x_t^*Ax_t)&=\mathrm{Re}(e_t^*(U^*AU)e_t)\\&=\mathrm{Re}(a_t+b_t\mathrm{i})=a_t,1\leqslant t\leqslant n\end{aligned}$$

由此知本命题成立. □

命题5.6.5 设 $A\in Q^{n\times n}$,则

1° $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^*)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)$ (5.6.28)

2° $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)=\mathrm{tr}R(A)$ (5.6.29)

证 1° 设 $A=(a_{ij})$,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^*)=\mathrm{Re}(\sum_{t=1}^{n}\overline{a_{tt}})=\mathrm{Re}(\sum_{t=1}^{n}a_{tt})=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A).$$

2° 由式(5.6.23)及命题(5.6.2)之2°,有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}R(A))+\mathrm{Re}(\mathrm{tr}S(A))\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}R(A))+0\\&=\mathrm{tr}R(A)\end{aligned}$$

□

命题5.6.6 $A\in P_n^{\geqslant}(Q)\Leftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0$,有 $\varepsilon I_n+A_t\in P_n^{>}(Q)$

证 "$\Rightarrow$" 显然成立.

"$\Leftarrow$" 设对$\forall\varepsilon>0,\varepsilon I_n+A\in P_n^{>}(Q)$,则对任意 $0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$,有

$$\varepsilon(\bar{x}_1 x_1 + \cdots + \bar{x}_n x_n) + \mathrm{Re}(x^* A x) > 0$$

在上式中,令 $\varepsilon \to 0^+$,即得

$$\mathrm{Re}(x^* A x) \geqslant 0$$

故
$$A \in P_n^{\geqslant}(Q)$$
□

命题 5.6.7 设 $S \in SC_n^-(Q)$,λ 是 S 的右特征值,则

$$\mathrm{Re}(\lambda) = 0.$$

证 设 $0 \neq x \in Q^{n\times 1}$ 是 S 的属于特征值 λ 的特征向量,则

$$Sx = x\lambda$$

于是有

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} x^* x &= (\overline{x\lambda})^{\mathrm{T}} x = (\overline{Sx})^{\mathrm{T}} x = (Sx)^* x \\ &= x^* S^* x = -x^* S x = -x^* x\lambda\end{aligned}$$

又 $0 \neq x^* x \in R$,故由上式即得 $\bar{\lambda} = -\lambda$,所以 $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$. □

推论 设 $S \in SC_n^-(Q)$,则 S 必有零实部、非负虚部的(复)右特征值.

证 由定理 4.1.2 与命题 5.6.7 即得. □

命题 5.6.8 设 $S \in SC_n^-(Q)$,$x, y \in Q^{n\times 1}$,$b_1, b_2 \in R^+$,$Sx = b_1 x\mathrm{i}$,$Sy = b_2 y\mathrm{i}$,若 $b_1 \neq b_2$,则 $x^* y = 0$.

证 因为

$$\begin{aligned}b_1 \mathrm{i} x^* y &= -\overline{(x b_1 \mathrm{i})}^{\mathrm{T}} y = -(Sx)^* y \\ &= -x^* S^* y = x^* S y = x^* y b_2 \mathrm{i}\end{aligned} \quad ①$$

设
$$x^* y = a_1 + \mathrm{j} a_2 \ (a_1, a_2 \in C)$$

式②代入式①得 $b_1 a_1 \mathrm{i} + b_1 \mathrm{ij} a_2 = b_2 a_1 \mathrm{i} + \mathrm{j}(b_2 a_2 \mathrm{i})$ ②

由式③得 $(b_1 - b_2) a_1 \mathrm{i} = \mathrm{k}(a_1 + b_2) a_2 = 0$ ③

故得
$$a_1 = a_2 = 0$$

因此
$$x^* y = 0$$
□

命题 5.6.9 设 $S \in SC_n^-(Q)$,则必存在 $U \in U^{n\times n}$,使

$$U^* S U = \mathrm{diag}(b_1 \mathrm{i}, \cdots, b_n \mathrm{i}), 0 \leqslant b_t \in R, 1 \leqslant t \leqslant n \tag{5.6.30}$$

证 对 S 的阶数 n 采用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,设 $S=(q)$, $q=a_1+a_2\mathrm{i}+a_3\mathrm{j}+a_4\mathrm{k}\in Q$,由 $\bar{q}=-q$,则知 $a_1=0$, $q=a_2\mathrm{i}+a_3\mathrm{j}+a_4\mathrm{k}$,于是由命题 1.3.7 知,存在 $0\neq x\in Q$,使

$$x^{-1}qx=a_1+b\mathrm{i}=b\mathrm{i}$$

其中 $b=\sqrt{a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2}\geqslant 0$,而 $x^{-1}x=1$. 这表明 $n=1$ 时,命题成立.

假定 $n=p\geqslant 1$ 时,命题成立. 当 $n=p+1$ 时,由命题 5.6.7 的推论知,可取 S 的一个右特征值 $\lambda_1=b_1\mathrm{i}(b\geqslant 0)$,再取 S 的属于 λ_1 的一个单位特征向量 x,令

$$x^{\perp}=\{y\in Q^{p\times 1}\mid y^*x=0\}$$

显然 $x^{\perp}$ 构成 Q 上的右向量空间,维数是 p,现取 $x^{\perp}$ 的一个正交单位 Q 右基 $y_1,\cdots,y_p$,并作方阵

$$U_1=(x,y_1,\cdots,y_p)$$

则 $U_1\in Q^{(p+1)\times(p+1)}$,且可设

$$U_1{}^*SU_1=\begin{pmatrix} b_1\mathrm{i} & \\ & S_1 \end{pmatrix}$$

显见 S_1 是 p 阶斜自共轭阵,由归纳假设,有 $U_2\in U^{p\times p}$,使

$$U_2{}^*S_1U_2=\mathrm{diag}(b_2\mathrm{i},\cdots,b_{p+1}\mathrm{i}),\ b_t\geqslant 0,\ 2\leqslant t\leqslant p+1$$

令

$$U=U_1\begin{pmatrix} 1 & \\ & U_2 \end{pmatrix}$$

则 $U\in U^{(p+1)\times(p+1)}$,使

$$U^*SU=\mathrm{diag}(b_1\mathrm{i},b_2\mathrm{i},\cdots,b_{p+1}\mathrm{i}),\ b_t\geqslant 0,\ 1\leqslant t\leqslant p+1$$

归纳法完成. □

命题 5.6.10 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 $A\in P_n^{>}(Q)$ 的充要条件是存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$R(A)=P^*P,\quad S(A)=P^*\mathrm{diag}(\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,\mathrm{i}\lambda_n)P,$$

$$A=P^{*}\operatorname{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,1+\mathrm{i}\lambda_n)P,\quad \lambda_t\in R,t=1,\cdots,n$$

证 充分性是显然的. 下证必要性.

设 $A\in P_n^{>}(Q)$, 则由命题 5.6.3 知 $R(A)\in SC_n^{>}(Q)$, 于是由定理 4.3.2, 存在可逆阵 $P_1\in Q^{n\times n}$, 使 $R(A)=P_1{}^{*}P_1$, 令 $Q=P_1{}^{-1}$, 则有 $Q^{*}R(A)Q=I_n$, 因 $S(A)\in SC_n^{-}(Q)$, 则 $Q^{*}S(A)Q\in SC_n^{-}(Q)$. 由命题 5.6.9 知, 存在 $U\in U^{n\times n}$, 使

$$U^{*}Q^{*}S(A)QU=\operatorname{diag}(\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,\mathrm{i}\lambda_n),\lambda_t\in R,1\leqslant t\leqslant n \qquad ①$$

且仍有
$$U^{*}Q^{*}R(A)QU=I_n, \qquad ②$$

令 $P_2=QU$, 则 P_2 仍可逆, 且

$$\begin{aligned}P_2{}^{*}AP_2&=P_2{}^{*}R(A)P_2+P_2{}^{*}S(A)P_2\\&=\operatorname{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,1+\mathrm{i}\lambda_n)\end{aligned} \qquad ③$$

令 $P=P_2{}^{-1}$, 则 P 可逆, 且有 $P=U^{*}Q^{-1}$, 于是由式①, ②, ③, 有

$$R(A)=(Q^{*})^{-1}UI_nU^{*}Q^{-1}=(P_2{}^{-1})^{*}P_2{}^{-1}=P^{*}P,$$

$$S'(A)=P^{*}\operatorname{diag}(\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,\mathrm{i}\lambda_n)P$$

$$A=P^{*}\operatorname{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,1+\mathrm{i}\lambda_n)P$$

故命题 5.6.10 成立. □

命题 5.6.11 设 $A\in P_n^{>}(Q)$, $T\in Q^{n\times n}$, 且 T 可逆, 则

$$T^{*}AT\in P_n^{>}(Q).$$

证 对 $\forall\, 0\neq x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$, 令 $y=Tx$, 由 T 可逆, 则 $y\neq 0$, 因 $A\in P_n^{>}(Q)$, 则 $\operatorname{Re}(y^{*}Ay)>0$, 于是有

$$\operatorname{Re}(x^{*}(T^{*}AT)x)=\operatorname{Re}(y^{*}Ay)>0,$$

因此
$$T^{*}AT\in P_n^{>}(Q)$$
□

定理 5.6.7 设 $A\in P_n^{>}(Q)$, 则

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A^{k})\leqslant(\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A))^{k},k=1,2,3 \qquad (5.6.31)$$

证 由 $A\in P_n^{>}(Q)$ 及命题 5.6.4, 存在 $U\in U^{n\times n}$, 使

$$U^*AU=\begin{pmatrix} a_1+b_1\mathrm{i} & & * \\ & \ddots & \\ & & a_n+b_n\mathrm{i} \end{pmatrix}, a_t, b_t \in R, a_t>0, 1\leqslant t\leqslant n \quad ①$$

当 $k=1$ 时,式(5.6.31)显然成立. 当 $k=2$ 时,由式(4.2.27)及式①,有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^2)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}UU^*A^2)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}U^*A^2U)\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}U^*AUU^*AU)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(U^*AU)^2)\\&=\mathrm{Re}\left(\sum_{t=1}^{n}(a_t+b_t\mathrm{i})^2\right)=\sum_{t=1}^{n}(a_t{}^2-b_t{}^2)\\&\leqslant\sum_{t=1}^{n}a_t{}^2\end{aligned}\quad ②$$

由定理 4.2.10 之推论 1 及式①,有

$$(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A))^2=(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}U^*AU))^2=(\sum_{t=1}^{n}a_t)^2>\sum_{t=1}^{n}a_t{}^2 \quad ③$$

于是由式②,③,即知当 $n=2$ 时,式(5.6.31)成立.

当 $k=3$ 时,由式(4.2.27)及式①有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^3)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(U^*AU)^3)=\mathrm{Re}(\sum_{t=1}^{n}(a_t+b_t\mathrm{i})^3)\\&=\sum_{t=1}^{n}(a_t{}^3-3a_tb_t{}^2)\leqslant\sum_{t=1}^{n}a_t{}^3\end{aligned}\quad ④$$

由定理 4.2.10 之推论 1 及式④,有

$$(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A))^3=(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}U^*AU))^3=\left(\sum_{t=1}^{n}a_t\right)^3>\sum_{t=1}^{n}a_t{}^3 \quad ⑤$$

于是由式④,⑤即知当 $k=3$ 时,式(5.6.31)成立. □

注 当 $k\geqslant4$ 时,式(5.6.31)不一定成立. 例如:令 $A=\begin{pmatrix}1&-3\\3&1\end{pmatrix}$,则 A 是亚正定阵,且 $A^4=\begin{pmatrix}28&96\\-96&28\end{pmatrix}$,于是有

$$\mathrm{tr}A^4=28+28=56>16=2^4=(\mathrm{tr}A)^4$$

定理 5.6.8 设 $A\in P_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^k)\leqslant(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A))^k,\ k=1,2,3 \tag{5.6.32}$$

证 对任意实数 $\varepsilon>0$,因 $A\in P_n^{\geqslant}(Q)$,则由命题 5.6.6 知,$\varepsilon\mathrm{I}_n+A\in P_n^{>}(Q)$,由定理 5.6.7,有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(\varepsilon\mathrm{I}_n+A)^k)\leqslant(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(\varepsilon\mathrm{I}_n+A)))^k,\ k=1,2,3$$

在上式中,令 $\varepsilon\to0^+$,即得式(5.6.32). □

定理 5.6.9 设 $A\in P_n^{>}(Q)$,且 A 的谱值都是实数,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^k)\leqslant(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A))^k,\ k=1,2,\cdots \tag{5.6.33}$$

证 因 $A\in P_n^{>}(Q)$,且 A 的谱值都是实数,则由命题 5.6.4 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_t>0,1\leqslant t\leqslant n \tag{①}$$

由定理 4.2.10 之推论 1 及式①有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^k)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AUU^*A\cdots UU^*AUU^*)\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(U^*AU)(U^*AU)\cdots(U^*AU))\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(U^*AU)^k)=\mathrm{Re}\Big(\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^k\Big)\end{aligned} \tag{②}$$

又由定理 4.2.10 之推论 1 及式①,有

$$(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A))^k=(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}U^*AU))^k=\Big(\sum_{t=1}^{n}\lambda_t\Big)^k \tag{③}$$

由琴生不等式(5.2.9)知,当 $k\geqslant1$ 时,有

$$\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^k\leqslant\Big(\sum_{t=1}^{n}\lambda_t\Big)^k \tag{④}$$

于是,由式②,③,④,即知式(5.6.33)成立. □

用 $\varepsilon I+A$ 代替 A,并采用连续性的方法,由定理 5.6.8 可得

推论 设 $A\in P_n^{\geqslant}(Q)$,且 A 的谱值为实数,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^k)\leqslant(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A))^k,\ k=1,2,\cdots \tag{5.6.34}$$

定理 5.6.10 设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$B\in P_n^{\geqslant}(Q)$,则

$1°$ $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B))\geqslant 0$; (5.6.35)

$2°$ $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)\leqslant \mathrm{tr}A\cdot\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B)$. (5.6.36)

证 $1°$ 由式(5.6.23),有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A(R(B)+S(B)))\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B)+\mathrm{tr}AS(B))\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B))+\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A\frac{B-B^*}{2})\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B))+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB-AB^*))\end{aligned} \quad ①$$

因 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,则 $A^*=A$,于是由定理 4.2.10 之推论 1 及式(5.6.28),有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB^*)&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A^*B^*)\\&=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B^*A^*)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB)^*)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)\end{aligned}$$

由上式知

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB-AB^*))=0 \quad ②$$

于是由式①,②,得

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B)) \quad ③$$

由命题 5.6.3 之 $2°$ 及 $A\in P_n^{\geqslant}(Q)$ 知,$R(A)\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,又 $B\in P_n^{\geqslant}(Q)$,则 $R(B)\in SC_n^{\geqslant}(Q)$. 从而由定理 4.3.22 知

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B))\geqslant 0 \quad ④$$

于是由式③,④得

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B))\geqslant 0,$$

故式(5.6.35)成立.

$2°$ 由式(5.5.39)′及式(5.6.29),有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AR(B))\leqslant \mathrm{tr}A\cdot\mathrm{tr}R(B)=\mathrm{tr}A\cdot\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B) \quad ⑤$$

于是,由式(5.6.35)及式⑤即知式(5.6.36)成立. □

定理 5.6.11 设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$B\in P_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)\leqslant(\mathrm{tr}A^2)^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{Re}(\mathrm{tr}\frac{B^2+BB^*}{2})\right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.6.37)$$

证　由式(5.6.36)与(5.5.39),有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)=\mathrm{tr}AR(B)\leqslant(\mathrm{tr}A^2)^{\frac{1}{2}}[\mathrm{tr}(R(B))^2]^{\frac{1}{2}} \quad ①$$

又由式(5.6.29),有

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(R(B))^2&=\mathrm{tr}\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\mathrm{tr}(B+B^*)(B+B^*)\\&=\frac{1}{4}\mathrm{tr}(B^2+B^*B+BB^*+(B^*)^2)\\&=\frac{1}{4}\mathrm{tr}(B^2+(B^2)^*)+\frac{1}{4}\mathrm{tr}(B^*B+(B^*B)^*)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{tr}R(B^2)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(BB^*)=\mathrm{tr}R\left(\frac{B^2+BB^*}{2}\right)\\&=\mathrm{Re}\left(\mathrm{tr}\left(\frac{B^2+BB^*}{2}\right)\right)\end{aligned} \quad ②$$

于是由式①,②即知式(5.6.37)成立. □

定理 5.6.12　设 $A\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$B\in P_n^{\geqslant}(Q)$,则

$$(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB))^{\frac{1}{2}}\leqslant\mathrm{Re}\left(\mathrm{tr}\,\frac{A+B}{2}\right) \quad (5.6.38)$$

证　由定理 5.6.9,有

$$0\leqslant\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)\leqslant\mathrm{tr}A\cdot\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B)$$

由上式及几何—算术平均值不等式,有

$$\begin{aligned}(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB))^{\frac{1}{2}}&\leqslant(\mathrm{tr}A\cdot\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B))^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}(\mathrm{tr}A+\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B))\\&=\mathrm{Re}\left(\mathrm{tr}\,\frac{A+B}{2}\right)\end{aligned}$$

故式(5.6.38)成立. □

定理 5.6.13　设 $A\in SC_n^{>}(Q)$,$B\in P_n^{>}(Q)$,则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB)^k)\leqslant(\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB))^k,\ k=1,2,3 \quad (5.6.39)$$

证　由 $A\in SC_n^{>}(Q)$,由定理 4.3.2 之 3°,存在可逆阵 $P_1\in Q^{n\times n}$,使

$$A=P_1P_1^* \quad ①$$

因 $B\in P_n^{>}(Q)$,由命题 5.6.1 之 1°知,$P_1^*BP_1\in P_n^{>}(Q)$,于是由命题 5.6.8 知,存在可逆阵 $Q\in Q^{n\times n}$,使

$$P_1{}^* BP_1 = Q^* \operatorname{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1, \cdots, 1+\mathrm{i}\lambda_n) Q, \lambda_t \in R, 1 \leqslant t \leqslant n \tag{②}$$

记 $P = P_1{}^{-1}, D = \operatorname{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1, \cdots, 1+\mathrm{i}\lambda_n)$，则由式②，得

$$B = P^* Q^* DQP \tag{③}$$

于是由式①，③，有

$$AB = P_1 P_1{}^* P^* Q^* DQP = P^{-1} Q^* DQP \tag{④}$$

从而

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= P^{-1} Q^* DQPP^{-1} Q^* DQP \\ &= P^{-1}(Q^* DQ)(Q^* DQ)P \\ &= P^{-1}(Q^* DQ)^2 P\end{aligned} \tag{⑤}$$

同理

$$(AB)^3 = P^{-1}(Q^* DQ)^3 P \tag{⑥}$$

由式③有

$$Q^* DQ = (P^{-1})^* BP^{-1} \tag{⑦}$$

由 $B \in P_n^{>}(Q)$ 及命题 5.6.9 知，$(P^{-1})^* BP^{-1} \in P_n^{>}(Q)$，从而由式⑦知，$Q^* DQ \in P_n^{>}(Q)$，由式⑤知，$(AB)^2$ 相似于 $(Q^* DQ)^2$，于是由定理 4.2.10 之推论 1，定理 5.6.7 及式④，有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(AB)^2) &= \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(Q^* DQ)^2) \\ &\leqslant (\operatorname{Re}(\operatorname{tr} Q^* DQ))^2 \\ &= (\operatorname{Re}(\operatorname{tr} P^{-1} Q^* DP))^2 \\ &= (\operatorname{Re}(\operatorname{tr} AB))^2\end{aligned}$$

同理，由式⑥知，$(AB)^3$ 相似于 $(Q^* DQ)^3$，于是由定理 4.2.10 之推论 1，定理 5.6.7 及式④，仿上即可得

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(AB)^3) \leqslant (\operatorname{Re}(\operatorname{tr} AB))^3$$

因此，式(5.6.39)成立． □

定理 5.6.14 设 $A \in SC_n^{\geqslant}(\dot{Q}), B \in P_n^{\geqslant}(Q)$，则

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(AB)^k) \leqslant (\operatorname{Re}(\operatorname{tr} AB))^k, k = 1, 2, 3 \tag{5.6.40}$$

证 仿定理 5.6.8 之证明，利用定理 5.6.13 和连续性的方法即可证得． □

§5.7 四元数矩阵行列式的不等式

本节论述四元数自共轭矩阵的行列式与重行列式的一系列不等式.

定理 5.7.1 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$\alpha\in R$，则

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 时，有

$$|A+B|^{\alpha}\geqslant|A|^{\alpha}+|B|^{\alpha} \tag{5.7.1}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{n}$ 时，有

$$|A+B|^{\alpha}\geqslant 2^{n\alpha-1}(|A|^{\alpha}+|B|^{\alpha}) \tag{5.7.2}$$

证 由 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$ 及定理 4.3.6 之 7°知 $|A|\geqslant 0$，$|B|\geqslant 0$，且由定理 4.3.11 知，存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$P^*AP=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad r\leqslant n \qquad ①$$

$$P^*BP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\quad \lambda_t\geqslant 0, 1\leqslant t\leqslant n \qquad ②$$

于是，由定理 3.3.11 之推论及式①，②，有

$$\begin{aligned} |P^*P||A+B| &= |P^*(A+B)P| \\ &= |P^*AP+P^*BP| \\ &= \prod_{t=1}^{n}(\delta_t+\lambda_t) \end{aligned} \qquad ③$$

其中 $\delta_1=\cdots=\delta_r=1$，$\delta_{r+1}=\cdots=\delta_n=0$，$\lambda_t\geqslant 0$，$1\leqslant t\leqslant n$.

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 时，由 Hölder 不等式(5.2.28)′，有

$$\left[\prod_{t=1}^{n}(\delta_t+\lambda_t)\right]^{\alpha}\geqslant\left(\prod_{t=1}^{n}\delta_t\right)^{\alpha}+\left(\prod_{t=1}^{n}\lambda_t\right)^{\alpha} \qquad ④$$

于是由式①,②,③,④及定理 3.3.11 之推论,有

$$
\begin{aligned}
|P^* P|^\alpha |A+B|^\alpha &\geqslant \left(\prod_{t=1}^{n} \delta_t\right)^\alpha + \left(\prod_{t=1}^{n} \lambda_t\right)^\alpha \\
&= |P^* AP|^\alpha + |P^* BP|^\alpha \\
&= |P^* P|^\alpha (|A|^\alpha + |B|^\alpha)
\end{aligned}
$$

由于 P 可逆,则 $|P^* P|>0$,故在上式中消去 $|P^* P|$,即得式(5.7.1).

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{m}$ 时,由 Hölder 不等式(5.2.29)′,有

$$
\left[\prod_{t=1}^{n} (\delta_t+\lambda_t)\right]^\alpha \geqslant 2^{n\alpha-1}\left[\left(\prod_{t=1}^{n} \delta_t\right)^\alpha + \left(\prod_{t=1}^{n} \lambda_t\right)^\alpha\right] \qquad ⑤
$$

于是由式①,②,③,⑤,及定理 3.3.11 之推论,仿 1°之推导即得式(5.7.2). □

推论 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$A\geqslant B$,(即 $A-B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$),$\alpha\in R^+$,则

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 时,有

$$
|A-B|^\alpha \leqslant |A|^\alpha - |B|^\alpha \qquad (5.7.3)
$$

特别有

$$
|A|^\alpha \geqslant |B|^\alpha, |A|\geqslant|B| \qquad (5.7.3)'
$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{n}$ 时,有

$$
|A-B|^\alpha \leqslant 2^{1-n\alpha}|A|^\alpha - |B|^\alpha \qquad (5.7.4)
$$

证 1° 由式(5.7.1),有

$$
|A|^\alpha = |A-B+B|^\alpha \geqslant |A-B|^\alpha + |B|^\alpha
$$

由此即得式(5.7.3).

2° 由式(5.7.2),有

$$
|A|^\alpha = |A-B+B|^\alpha \geqslant 2^{n\alpha-1}(|A-B|)^\alpha + |B|^\alpha)
$$

由此得式(5.7.4). □

定理 5.7.2 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$1\leqslant t\leqslant m$,$\alpha\geqslant\frac{1}{n}$,则

$$\left|\sum_{t=1}^{m} A_t\right|^{\alpha} \geqslant \sum_{t=1}^{m} |A_t|^{\alpha} = \sum_{t=1}^{m} |A_t^{\alpha}| \qquad (5.7.5)$$

证 用数学归纳法证之. 当 $m=2$ 时, 由定理 5.7.1 之 1°即可得式(5.7.5)成立. 现设 $2 \leqslant m \leqslant k-1$ 时, 式(5.7.5)成立. 则当 $m=k$ 时, 由于 $A_1+\cdots+A_{k-1} \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, 于是由定理 5.7.1 之 1°及归纳假设, 有

$$\begin{aligned}|A_1+\cdots+A_{k-1}+A_k|^{\alpha} &\geqslant |A_1+\cdots+A_{k-1}|^{\alpha}+|A_k|^{\alpha}\\ &\geqslant |A_1|^{\alpha}+\cdots+|A_{k-1}|^{\alpha}+|A_k|^{\alpha}\end{aligned}$$

于是便证明式(5.7.5)成立. □

在定理 5.7.2 中分别令 $\alpha=\frac{1}{n}, 1$, 可得

推论 设 $A_t \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $1 \leqslant t \leqslant m$, 则

$$\sum_{t=1}^{m} |A_t^{\frac{1}{n}}| = \sum_{t=1}^{m} |A_t|^{\frac{1}{n}} \leqslant \left|\sum_{t=1}^{m} A_t\right|^{\frac{1}{n}} \qquad (5.7.6)$$

$$\sum_{t=1}^{m} |A_t| \leqslant \left|\sum_{t=1}^{m} A_t\right| \qquad (5.7.7)$$

定理 5.7.3 设 $A_{st} \in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $\alpha_t \in R$, $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant t \leqslant k$, 则

1° 当 $A_{st} \geqslant 0$, $\alpha_t > 0$, $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant t \leqslant k$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_k \geqslant \frac{1}{n}$ 时, 有

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{k} |A_{st}^{\alpha_t}| \leqslant \prod_{t=1}^{k} \left|\sum_{s=1}^{m} A_{st}\right|^{\alpha_t} \qquad (5.7.8)$$

2° 当 $A_{st} \geqslant 0$, $\alpha_t > 0$, $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant t \leqslant k$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_k = r \leqslant \frac{1}{n}$ 时, 有

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{k} |A_{st}^{\alpha_t}| \leqslant m^{1-nr} \prod_{t=1}^{k} \left|\sum_{s=1}^{m} A_{st}\right|^{\alpha_t} \qquad (5.7.9)$$

3° 当 $A_{st} > 0$, $\alpha_t \leqslant 0$, $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant t \leqslant k$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_k = r$ 时,

有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}^{\alpha_t}|\geqslant m^{1-nr}\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha_t} \tag{5.7.10}$$

证 1° 因 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，则由命题 5.3.1 知，$A_{st}^{\alpha_t}\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$1\leqslant s\leqslant m$，$1\leqslant t\leqslant k$；又 $\alpha_1+\cdots+\alpha_k\geqslant\frac{1}{n}$，则 $n\alpha_1+\cdots+n\alpha_n\geqslant 1$，于是由 Hölder 不等式(5.2.17)及式(5.7.6)，有

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}^{\alpha_t}| &= \sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}(|A_{st}|^{\frac{1}{n}})^{n\alpha_t}\\ &\leqslant\prod_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\frac{1}{n}}\right)^{n\alpha_t}\\ &\leqslant\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha_t}\end{aligned}$$

故式(5.7.8)成立.

2° 利用 Hölder 不等式(5.2.18)及式(5.7.6)即可得式(5.7.9).

3° 由 $A_{st}>0$，有 $|A_{st}|>0$，于是由式(5.7.6)，有

$$0<\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\frac{1}{n}}\leqslant\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\frac{1}{n}},1\leqslant t\leqslant k$$

因 $\alpha_t<0(1\leqslant t\leqslant k)$，则由上式有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\frac{1}{n}}\right)^{n\alpha_t}\geqslant\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha_t},1\leqslant t\leqslant k \tag{①}$$

于是由 Hölder 不等式(5.2.21)及式①有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}^{\alpha_t}| &= \sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}(|A_{st}|^{\frac{1}{n}})^{n\alpha_t}\\ &\geqslant m^{1-nr}\prod_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\frac{1}{n}}\right)^{n\alpha_t}\end{aligned}$$

$$\geqslant m^{1-nr}\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha_t}$$

故式(5.7.10)成立.

注 在定理 5.7.3 中令 $n=1$,则得 Hölder 不等式(5.2.17),(5.2.18),(5.2.21).故定理 5.7.3 是 Hölder 不等式在四元数矩阵行列式中的一种推广形式.

在定理 5.7.3 中令 $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=\alpha$,可得

推论 1 设 $A_{st}\in SC_n^{\geqslant}(Q),1\leqslant s\leqslant m,1\leqslant t\leqslant k,\alpha\in R$,则

1° 当 $A_{st}\geqslant 0,\alpha\geqslant\frac{1}{nk}$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}^{\alpha}|\leqslant\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha}\tag{5.7.11}$$

2° 当 $A_{st}\geqslant 0,0<\alpha\leqslant\frac{1}{nk}$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}^{\alpha}|\leqslant m^{1-nk\alpha}\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha}\tag{5.7.12}$$

3° 当 $A_{st}>0,\alpha\leqslant 0$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}^{\alpha}|\geqslant m^{1-nk\alpha}\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha}\tag{5.7.13}$$

在推论 1 中,令 $k=1$,可得

推论 2 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q),1\leqslant s\leqslant m,\alpha\in R$,则

1° 当 $A_s\geqslant 0,\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\leqslant\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\alpha}\tag{5.7.14}$$

2° 当 $A_s\geqslant 0,0<\alpha\leqslant\frac{1}{n}$ 时,有

$$\sum_{s=1}^{m} |A_s^{\alpha}| \leqslant m^{1-n\alpha} \left| \sum_{s=1}^{m} A_s \right|^{\alpha} \qquad (5.7.15)$$

3° 当$A_s>0, \alpha\leqslant 0$时，有

$$\sum_{s=1}^{m} |A_s^{\alpha}| \geqslant m^{1-n\alpha} \left| \sum_{s=1}^{m} A_s \right|^{\alpha} \qquad (5.7.16)$$

特别当 $\alpha=-1$ 时，有

$$\left| \sum_{s=1}^{m} A_s \right| \cdot \sum_{s=1}^{m} |A_s^{-1}| \geqslant m^{n+1} \qquad (5.7.17)$$

在推论 1 中令 $m=2$，可得

推论 3 设 $A_t, B_t \in SC_n^{\geqslant}(Q), 1\leqslant t\leqslant k, \alpha\in R$，则

1° 当$A_t, B_t\geqslant 0, \alpha\geqslant 1/nk$ 时，有

$$\prod_{t=1}^{k} |A_t|^{\alpha} + \prod_{t=1}^{k} |B_t|^{\alpha} \leqslant \prod_{t=1}^{k} |A_t+B_t|^{\alpha} \qquad (5.7.18)$$

2° 当$A_t, B_t\geqslant 0, 0<\alpha\leqslant 1/nk$ 时，有

$$\prod_{t=1}^{k} |A_t|^{\alpha} + \prod_{t=1}^{k} |B_t|^{\alpha} \leqslant 2^{1-nk\alpha} \prod_{t=1}^{k} |A_t+B_t|^{\alpha}$$

(5.7.19)

3° 当$A_t, B_t>0, \alpha\leqslant 0$时，有

$$\prod_{t=1}^{k} |A_t|^{\alpha} + \prod_{t=1}^{k} |B_t|^{\alpha} \geqslant 2^{1-nk\alpha} \prod_{t=1}^{k} |A_t+B_t|^{\alpha}$$

(5.7.20)

定理 5.7.4 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q), 1\leqslant s\leqslant m$，则

1° 当$A_s\geqslant 0, \alpha\geqslant 1/n$ 时，有

$$\left(\prod_{s=1}^{m} |A_s^{\alpha}| \right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \frac{1}{m} \left| \sum_{s=1}^{m} A_s \right|^{\alpha} \qquad (5.7.21)$$

特别当 $\alpha=1/n$ 或 1 时，分别有

$$\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{mn}}\leqslant\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\frac{1}{n}} \tag{5.7.22}$$

$$\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant\frac{1}{m^n}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right| \tag{5.7.23}$$

2° 当$A_s\geqslant 0, 0<\alpha\leqslant 1/n$ 时,有

$$\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^\alpha|\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant\frac{1}{m^{n\alpha}}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^\alpha \tag{5.7.24}$$

3° 当$A_s>0, \alpha\geqslant 1/n$ 时,有

$$\left(\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|^\alpha\right)^{-1}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^\alpha|\right)^{\frac{1}{m}} \tag{5.7.25}$$

特别当 $\alpha=1/n, 1$ 时,分别有

$$\left(\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{mn}} \tag{5.7.26}$$

$$\left(\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|\right)^{-1}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{m}} \tag{5.7.27}$$

4° 当$A_s>0, 0<\alpha\leqslant 1/n$ 时,有

$$\left(\frac{1}{m^{n\alpha}}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|^\alpha\right)^{-1}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^\alpha|\right)^{\frac{1}{m}} \tag{5.7.28}$$

证 1° 由几何—算术平均值不等式(5.1.4)及式(5.7.14),有

$$\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^\alpha|\right)^{\frac{1}{m}}=\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|^\alpha\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}|A_s|^\alpha\leqslant\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^\alpha$$

故式(5.7.21)成立.

2° 由几何—算术平均值不等式(5.1.4)及式(5.7.15),有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}|A_s|^{\alpha}$$

$$\leqslant\frac{1}{m}\cdot m^{1-n\alpha}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\alpha}=\frac{1}{m^{n\alpha}}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\alpha}$$

故(5.7.24)成立.

3° 因$A_s>0$,则 $A_s^{-1}>0$ 于是由式(5.7.21),有

$$\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|^{\alpha}\geqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_t^{-1}|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}}$$

所以 $$\left(\frac{1}{m}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|^{\alpha}\right)^{-1}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{-1}|^{\alpha}\right)^{-\frac{1}{m}}$$

$$=\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\right)^{\frac{1}{m}}$$

故式(5.7.25)成立.

4° 因$A_s>0$,则 $A_s^{-1}>0$,于是由式(5.7.23),有

$$\frac{1}{m^{n\alpha}}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|^{\alpha}\geqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{-1}|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}}$$

所以 $$\left(\frac{1}{m^{n\alpha}}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|^{\alpha}\right)^{-1}\leqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{-1}|^{\alpha}\right)^{-\frac{1}{m}}$$

$$=\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha}|\right)^{\frac{1}{m}}$$

故式(5.7.28)成立. □

注 在式(5.7.23)中令 $n=1$,则得几何—算术平均值不等式(5.1.4),故式(5.7.23)是几何—算术平均值不等式在四元数矩阵行列式上的推广.

定理 5.7.5 设 $A_s\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$\alpha_s\in R^+$,$1\leqslant s\leqslant m$,则

1° 当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=1$ 时,有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s\right|\geqslant\prod_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha_s}| \tag{5.7.29}$$

2° 当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r<1$ 时,有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s\right|^{\frac{1}{n}}\geqslant r-1+\prod_{s=1}^{m}|A_s^{\frac{\alpha_s}{n}}| \tag{5.7.30}$$

3° 当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=r$ 时,有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s^r\right|\geqslant r^n\prod_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha_s}| \tag{5.7.31}$$

证 1° 由式(5.7.6)及杨格不等式(5.2.5),有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s\right|&=\left(\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s\right|^{\frac{1}{n}}\right)^n\geqslant\left(\sum_{s=1}^{m}|\alpha_sA_s|^{\frac{1}{n}}\right)^n\\&=\left(\sum_{s=1}^{m}\alpha_s|A_s|^{\frac{1}{n}}\right)^n\geqslant\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|^{\frac{\alpha_s}{n}}\right)^n\\&=\prod_{s=1}^{m}|A_s|^{\alpha_s}=\prod_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha_s}|\end{aligned}$$

故式(5.7.29)成立.

2° 由式(5.7.6)及杨格不等式(5.2.5)′,有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s\right|^{\frac{1}{n}}&\geqslant\sum_{s=1}^{m}|\alpha_sA_s|^{\frac{1}{n}}=\sum_{s=1}^{m}\alpha_s|A_s|^{\frac{1}{n}}\\&\geqslant r-1+\prod_{s=1}^{m}\left(|A_s|^{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha_s}\\&=r-1+\prod_{s=1}^{m}|A_s^{\alpha_s/n}|\end{aligned}$$

故式(5.7.30)成立.

3° 由式(5.7.6)及杨格不等式(5.2.6),有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s^r\right|=\left(\left|\sum_{s=1}^{m}\alpha_sA_s^r\right|^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$\geqslant \left(\sum_{s=1}^{m} |\alpha_s A_s^r|^{\frac{1}{n}} \right)^n$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{m} \alpha_s |A_s^{\frac{r}{n}}| \right)^n$$

$$\geqslant \left[r \left(\prod_{s=1}^{m} |A_s^{\frac{r}{n}}|^{\alpha_s} \right)^{\frac{1}{r}} \right]^n$$

$$= r^n \prod_{s=1}^{m} |A_s^{\alpha_s}|$$

故式(5.7.31)成立. □

注 式(5.7.28),(5.7.30),(5.7.31)是杨格不等式在四元数矩阵行列式上的推广.

在式(5.7.29)中令 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \frac{1}{m}$,可得

推论 设 $A_s \in SC_n(Q)$,$1 \leqslant s \leqslant m$,则

1° 当$A_s \geqslant 0$,$1 \leqslant s \leqslant m$ 时,有

$$\left(\prod_{s=1}^{m} |A_s| \right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \frac{1}{m^n} \left| \sum_{s=1}^{m} A_s \right| = \left| \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} A_s \right| \quad (5.7.32)$$

2° 当$A_s > 0$,$1 \leqslant s \leqslant m$ 时,有

$$\left(\frac{1}{m^n} \left| \sum_{s=1}^{m} A_s^{-1} \right| \right)^{-1} \leqslant \left(\prod_{s=1}^{m} |A_s| \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5.7.33)$$

把式(5.7.32)与(5.7.33)合起来即得:当 $A_s \in SC_n^{>}(Q)$,$1 \leqslant s \leqslant m$时,则有

$$\left(\left| \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} A_s^{-1} \right| \right)^{-1} \leqslant \left(\prod_{s=1}^{m} |A_s| \right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \left| \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} A_s \right| \quad (5.7.34)$$

证 1° 在式(5.7.29)中,令$\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \frac{1}{m}$, 即得式(5.7.32)

2° 因$A_s \in SC_n^{>}(Q)$,则 $A_s^{-1} \in SC_n^{>}(Q)$,由式(5.7.32),有

$$\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{-1}|\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \frac{1}{m^n}\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|$$

由此即得

$$\left(\left|\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}A_s^{-1}\right|\right)^{-1} \leqslant \left[\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s^{-1}|\right)^{\frac{1}{m}}\right]^{-1} = \left(\sum_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{m}}$$

故式(5.7.33)成立.

注 在式(5.7.34)中令 $m=1$,即得调和—几何—算术平均值不等式,故式(5.7.34)是调和—几何—算术平均值不等式在四元数矩阵行列式上的推广.

定理 5.7.6 设 $A_s \in SC_n^{\geqslant}(Q)$,$1 \leqslant s \leqslant m$,$r \in R^+$,则

1° 当 $r \geqslant \frac{2}{n}$ 时,有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^r \geqslant \sum_{s=1}^{m}|A_s|^r + (m^{nr}-m)\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{r}{m}} \quad (5.7.35)$$

2° 当 $0 < r \leqslant \frac{2}{n}$ 时,有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}A_s^r\right| \leqslant \left[\sum_{s=1}^{m}|A_s| + (m^{\frac{n}{r}}-m)\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{1}{mn}}\right]^r \quad (5.7.36)$$

证 1° 因 $r \geqslant \frac{2}{n}$,则 $nr \geqslant 2$,于是由式(5.7.6)及不等式(5.2.12),有

$$\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^r = \left(\left|\sum_{s=1}^{m}A_s\right|^{\frac{1}{n}}\right)^{nr} \geqslant \left(\sum_{s=1}^{m}|A_s|^{\frac{1}{n}}\right)^{nr}$$

$$\geqslant \sum_{s=1}^{m}|A_s|^r + (m^{nr}-m)\left(\prod_{s=1}^{m}|A_s|\right)^{\frac{r}{m}}$$

故式(5.7.35)成立.

2° 由 $0 < r \leqslant \frac{n}{2}$,则 $0 < \frac{r}{n} \leqslant \frac{1}{2}$,于是由式(5.7.6)及不等式

(5.2.13)，有

$$\left|\sum_{s=1}^{m} A_s^r\right| = \left(\left|\sum_{s=1}^{m} A_s^r\right|^{\frac{1}{n}}\right)^n \geqslant \left(\sum_{s=1}^{m} |A_s^r|^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{m} |A_s|^{\frac{r}{n}}\right)^n$$

$$\geqslant \left\{\left[\sum_{s=1}^{m} |A_s| + (m^{\frac{n}{r}} - m)\left(\prod_{s=1}^{m} |A_s|^{\frac{r}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^{\frac{r}{n}}\right\}^n$$

$$= \left[\sum_{s=1}^{m}|A_s| + (m^{\frac{n}{r}} - m)\left(\prod_{s=1}^{m} |A_s|\right)^{\frac{1}{mn}}\right]^r$$

故式(5.7.36)成立. □

定理 5.7.7 设 $A_{st}\in SC_n(Q)$，$1\leqslant s\leqslant m$，$1\leqslant t\leqslant k$，且

$$0\leqslant A_{s1}\leqslant A_{s2}\leqslant\cdots\leqslant A_{sn},\ 1\leqslant s\leqslant m \tag{5.7.37}$$

又$\widetilde{A_{s1}},\widetilde{A_{s2}}\cdots\widetilde{A_{sk}}$是$A_{s1},A_{s2},\cdots,A_{sk}$的任一排列，$\alpha\in R^+$，则

1° 当$\alpha\geqslant\frac{1}{n}$时，有

$$\prod_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha}\leqslant\left(\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}\widetilde{A_{st}}\right|\right)^{\alpha} \tag{5.7.38}$$

2° 当$0<\alpha\leqslant\frac{1}{n}$时，有

$$\prod_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha}\leqslant m^{k(1-n\alpha)}\left(\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}\widetilde{A_{st}}\right|\right)^{\alpha} \tag{5.7.39}$$

3° 当$\alpha\geqslant\frac{1}{k}$时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|\widetilde{A_{st}}|^{\alpha}\leqslant\sum_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha} \tag{5.7.40}$$

4° 当$0<\alpha\leqslant\frac{1}{k}$时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|\widetilde{A_{st}}|^{\alpha}\leqslant m^{1-k\alpha}\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha} \tag{5.7.41}$$

证 1° 由式(5.7.37)及(5.7.3)′,有

$$0 \leqslant |A_{s1}| \leqslant |A_{s2}| \leqslant \cdots \leqslant |A_{sn}|, 1 \leqslant s \leqslant m \quad ①$$

于是由式①,(5.2.48)′及(5.7.14),有

$$\begin{aligned}\prod_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha} &\leqslant \prod_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}|\widetilde{A_{st}}|^{\alpha} \\ &\leqslant \prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}\widetilde{A_{st}}\right|^{\alpha} \\ &= \left(\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}\widetilde{A_{st}}\right|\right)^{\alpha}\end{aligned}$$

故式(5.7.38)成立.

2° 由式①,(5.2.48)′及(5.7.15),有

$$\begin{aligned}\prod_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha} &\leqslant \prod_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}|\widetilde{A_{st}}|^{\alpha} \\ &\leqslant (m^{1-n\alpha})^{k}\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}\widetilde{A_{st}}\right|^{\alpha} \\ &= m^{k(1-n\alpha)}\left(\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}\widetilde{A_{st}}\right|\right)^{\alpha}\end{aligned}$$

故式(5.7.39)成立.

3° 由式①,(5.2.47)′,(5.2.17)及(5.7.7),有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|\widetilde{A_{st}}|^{\alpha} &\leqslant \sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha} \\ &\leqslant \prod_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|\right)^{\alpha} \\ &\leqslant \prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha}\end{aligned}$$

故式(5.7.40)成立.

4° 由式②,(5.2.47)′,(5.2.18)及(5.2.7),有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|\widetilde{A_{s1}}|^{\alpha}\leqslant\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}$$

$$\leqslant m^{1-k\alpha}\prod_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|\right)^{\alpha}$$

$$\leqslant m^{1-k\alpha}\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha}$$

故式(5.7.41)成立. □

定理 5.7.8 设 $A_{st}\in SC_n^{>}(Q),1\leqslant s\leqslant m,1\leqslant t\leqslant k,\alpha,p\in R$,则

1° 当$\alpha\geqslant\frac{1}{n},0\neq p\leqslant 1$时,有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\quad(5.7.42)$$

特别当 $\alpha=\frac{1}{n}$,1 时,分别有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}\quad(5.7.43)$$

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\quad(5.7.44)$$

2° 当$0<\alpha\leqslant\frac{1}{n},0\neq p\leqslant 1$时,有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant k^{n\alpha-1}\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

(5.7.45)

3° 当$\alpha\leqslant 0,p\geqslant 1$时,有

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant k^{n\alpha-1}\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

(5.7.46)

证 1°由 $A_{st}\in SC_n^{>}(Q)$，$\alpha\geqslant\frac{1}{n}>0$，则 $|A_{st}|^{\alpha}>0$，$1\leqslant s\leqslant m$，$1\leqslant t\leqslant k$，于是由 $0\neq p\leqslant 1$ 及闵可夫斯基不等式(5.2.38)，有

$$\left[\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\geqslant\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad ①$$

又由 $\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 及式(5.7.5)，有

$$\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha}\geqslant\sum_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha},1\leqslant s\leqslant m \qquad ②$$

当 $p>0$ 时，将上式两边 p 次方，得

$$\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\geqslant\left(\sum_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}\right)^{p},1\leqslant s\leqslant m$$

故有
$$\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\geqslant\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}$$

将上式两边同时 $\frac{1}{p}$ 次方，得

$$\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\left[\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \qquad ③$$

由式③与①即得式(5.7.42).

当 $p<0$ 时，由式②有

$$\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\leqslant\left(\sum_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}\right)^{p},1\leqslant s\leqslant m$$

故有
$$\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\leqslant\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{k}|A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}$$

将上式两边同时 $\frac{1}{p}$ 次方，则证得式③仍成立.从而由式③与①即得式(5.7.42)成立.

2° 利用不等式(5.2.38)及式(5.7.15)仿 1°之证明即可得式(5.7.45)成立.

3° 由 $\alpha\leqslant 0$ 及式(5.7.16)，有

$$\left|\sum_{t=1}^{k} A_{st}\right|^{\alpha} \leqslant k^{n\alpha-1} \sum_{t=1}^{k} |A_{st}|^{\alpha}, 1 \leqslant s \leqslant m$$

因 $p \geqslant 1$,将上式两端同时 p 次方,得

$$\left|\sum_{t=1}^{k} A_{st}\right|^{\alpha p} \leqslant k^{(n\alpha-1)p} \left(\sum_{t=1}^{k} |A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}, 1 \leqslant s \leqslant m$$

故有 $$\sum_{s=1}^{m} \left|\sum_{t=1}^{k} A_{st}\right|^{\alpha p} \leqslant k^{(n\alpha-1)p} \sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{t=1}^{k} |A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}$$

再将上式同时$\frac{1}{p}$次方,得

$$\left(\sum_{s=1}^{m} \left|\sum_{t=1}^{k} A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant k^{n\alpha-1} \left[\sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{t=1}^{k} |A_{st}|^{\alpha}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \qquad ④$$

又因 $p \geqslant 1$,则由闵可夫斯基不等式(5.2.37),得

$$\left[\sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{t=1}^{k} |A_{s}t|^{\alpha}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{t=1}^{k} \left(\sum_{s=1}^{m} |A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad ⑤$$

于是由式④与⑤即得式(5.7.46). □

定理 5.7.9 设 $A_{st} \in SC_n^{>}(Q), 1 \leqslant s \leqslant m, 1 \leqslant t \leqslant k, \alpha, r \in R$,则

1° 当$\alpha \geqslant \frac{1}{n}, 0 \neq p \leqslant 1, r \geqslant 2$ 时,有

$$\left(\sum_{s=1}^{m} \left|\sum_{t=1}^{k} A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{r}{p}} \geqslant \sum_{t=1}^{k} \left(\sum_{s=1}^{m} |A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{r}{p}} + (k^{r}-k)\left(\prod_{t=1}^{k} \sum_{s=1}^{m} |A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{r}{pk}} \quad (5.7.47)$$

2° 当 $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}, 0 \neq p \leqslant 1, r \geqslant 2$ 时,有

$$\left(\sum_{s=1}^{m} \left|\sum_{t=1}^{k} A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{r}{p}} \geqslant k^{(n\alpha-1)r} \left[\sum_{t=1}^{k} \left(\sum_{s=1}^{m} |A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{r}{p}}\right.$$

$$+(k^r-k)\left(\prod_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{r}{pk}}\Big]$$

(5.7.48)

3° 当$\alpha\leqslant 0, p\geqslant 1, 0<r\leqslant\frac{1}{2}$时,有

$$\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{r}{p}}\leqslant\Big[k^{1-n\alpha}\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+(k^{\frac{1}{r}}-k)m^{(1-n\alpha p)/p}\left(\prod_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\frac{\alpha}{k}}\right)\Big]^r \qquad (5.7.49)$$

证 1° 由式(5.7.42)及式(5.2.12),即得式(5.7.47).

2° 由式(5.7.45)及式(5.2.12)即得式(5.7.48).

3° 因$\alpha\leqslant 0, p\geqslant 1$,则由式(5.7.46),有

$$\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant k^{1-n\alpha}\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad ①$$

因 $\alpha\leqslant 0, p\geqslant 1$,则 $\alpha p\leqslant 0$,则由式(5.7.16),有

$$\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\geqslant m^{1-n\alpha p}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha p}, 1\leqslant t\leqslant k \qquad ②$$

于是由式(5.2.13)及式①,②,有

$$\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{r}{p}}=\sum_{t=1}^{k}\left[\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^r$$

$$\geqslant\left\{\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}+(k^{\frac{1}{r}}-k)\left[\prod_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}|A_{st}|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{1}{k}}\right\}^r$$

$$\geqslant\Big\{k^{1-n\alpha}\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+(k^{\frac{1}{r}}-k)\left[\prod_{t=1}^{k}\left(m^{1-n\alpha p}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{1}{k}}\Big\}^r$$

$$=\Big[k^{1-n\alpha}\left(\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{t=1}^{k}A_{st}\right|^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(k^{\frac{1}{r}}-k\right)m^{(1-n\alpha p)/p}\left|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\right|^{\frac{\alpha}{k}}\Big]^r$$

故式(5.7.49)成立. □

定义 5.7.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,且 A 分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_k & B\\ C & A_{n-k}\end{pmatrix} \tag{5.7.50}$$

其中 $A_k\in Q^{k\times k}$, $A_{n-k}\in Q^{(n-k)\times(n-k)}$,若 A_k 可逆,则称

$$A/A_k \xlongequal{\triangle} A_{n-k}-CA_k^{-1}B\in Q^{(n-k)\times(n-k)} \tag{5.7.51}$$

为 A 关于它的 k 阶序顺主子阵 A_k 的 **Schur** 补.

命题 5.7.1 设 $A\in SC_n^{>}(Q)$, A_k 是 A 的 k 阶顺序主子阵, A/A_k 是 A 关于它的 k 阶顺序主子阵 A_k 的 Schur 补,则 A_k 与 A/A_k 都是正定的, $k=1,\cdots,n-1$.

证 设

$$A=\begin{pmatrix}A_k & B\\ B^* & A_{n-k}\end{pmatrix},\text{其中 } A_k\in Q^{k\times k}$$

则由定理 4.3.8,知 A_k 是正定的,且由命题 4.3.2,知

$$\begin{pmatrix}I_k & 0\\ -B^*A_k^{-1} & I_{n-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^* & B\\ B^* & A_{n-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_k & 0\\ -B^*A_k^{-1} & I_{n-k}\end{pmatrix}^*$$

$$=\begin{pmatrix}A_k & 0\\ 0 & A_{n-k}-B^*A_k^{-1}B\end{pmatrix}\in SC_n^{>}(Q)$$

于是由定理 4.3.8 即知 $A/A_k=A_{n-k}-B^*A_k^{-1}B$ 也是正定的.

□

关于正定阵的 Schur 补的行列式,我们有如下不等式:

定理 5.7.10 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$, $\alpha\in R$, $\alpha\geqslant\frac{1}{n-k}$,则

$$|(A+B)/(A+B)_k|^{\alpha}\geqslant|A/A_k+B/B_k|^{\alpha} \tag{5.7.52}$$

$$\geqslant|A/A_k|^{\alpha}+|B/B_k|^{\alpha} \tag{5.7.53}$$

证 将 A,B 分块为

$$A=\begin{pmatrix} A_k & A_{12} \\ A_{12}^* & \widetilde{A} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_k & B_{12} \\ B_{12}^* & \widetilde{B} \end{pmatrix}$$

因 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$，则由命题 5.3.1 及命题 5.7.1 知 A_k,B_k，$A_k^{-1},B_k^{-1},A/A_k,B/B_k,(A+B)/(A+B)_k$ 都是正定的. 下面我们来证明

$$M=(A+B)/(A+B)_k-A/A_k-B/B_k\in SC_{n-k}^{\geqslant}(Q) \qquad ①$$

事实上

$$\begin{aligned} M &=(\widetilde{A}+\widetilde{B})-(A_{12}^*+B_{12}^*)(A_k+B_k)^{-1}(A_{12}+B_{12}) \\ &\quad -(\widetilde{A}-A_{12}^*A_k^{-1}A_{12})-(\widetilde{B}-B_{12}^*B_k^{-1}B_{12}) \\ &=A_{12}^*[A_k^{-1}-(A_k+B_k)^{-1}]A_{12} \\ &\quad +B_{12}^*[B_k^{-1}-(A_k+B_k)^{-1}]B_{12} \\ &\quad -A_{12}^*(A_k+B_k)^{-1}B_{12}-B_{12}^*(A_k+B_k)^{-1}A_{12} \end{aligned}$$

又因为

$$A_k^{-1}-(A_k+B_k)^{-1}=(A_kB_k^{-1}A_k+A_k)^{-1}$$

$$B_k^{-1}-(A_k+B_k)^{-1}=B_k^{-1}A_k(A_k+A_kB_k^{-1}A_k)^{-1}A_kB_k^{-1}$$

于是

$$M=(A_{12}-A_kB_k^{-1}B_{12})^*(A_k+A_kB_k^{-1}A_k)^{-1}(A_{12}-A_kB_k^{-1}B_{12})$$

因 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$，故 $(A_k+A_kB_k^{-1}A_k)^{-1}\in SC_n^{>}(Q)$

于是由命题 4.3.2 之 1°知 $M\in SC_{n-k}^{\geqslant}(Q)$，从而由式①，(5.7.3)′知式(5.7.52)成立. 再由式(5.7.1)即知式(5.7.53)成立. □

利用关于(半)正定自共轭阵的行列式与其重行列式之间的关系，即定理 3.3.10 之推论，我们可以把上述四元数矩阵行列式的一系列不等式定理推广或平移到四元数矩阵重行列式上来.

定理 5.7.1′ 设 $A,B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$\alpha\in R$，则

1° 当 $\alpha\geqslant\dfrac{1}{2n}$ 时，有

$$\| A+B \|^{\alpha} \geqslant \| A \|^{\alpha} + \| B \|^{\alpha} \tag{5.7.54}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2n}$ 时，有

$$\| A+B \|^{\alpha} \geqslant 2^{2n\alpha-1}(\| A \|^{\alpha} + \| B \|^{\alpha}) \tag{5.7.55}$$

证 由定理 3.3.10 之推论知，当 $A, B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$ 时，有

$$|A|^2 = \| A \|, |B|^2 = \| B \|, |A+B|^2 = \| A+B \| \quad ①$$

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{2n}$ 时，有 $2\alpha\geqslant\frac{1}{n}$，则由式(5.7.1)，有

$$|A+B|^{2\alpha} \geqslant |A|^{2\alpha} + |B|^{2\alpha} \quad ②$$

于是由式①，②，即得式(5.7.54).

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2n}$ 时，有 $0<2\alpha\leqslant\frac{1}{n}$，则由式(5.7.2)，有

$$|A+B|^{2\alpha} \geqslant 2^{2n\alpha-1}(|A|^{2\alpha} + |B|^{2\alpha}). \quad ③$$

由式①，③，即可得式(5.7.55). □

推论 设 $A, B\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $A\geqslant B$, $\alpha\in R$，则

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{2n}$ 时，有

$$\| A-B \|^{\alpha} \leqslant \| A \|^{\alpha} - \| B \|^{\alpha} \tag{5.7.56}$$

$$\| A \|^{\alpha} \geqslant \| B \|^{\alpha} \tag{5.7.57}$$

$$\| A \| \geqslant \| B \| \tag{5.7.58}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2n}$ 时，有

$$\| A-B \|^{\alpha} \leqslant 2^{1-2n\alpha}(\| A \|^{\alpha} - \| B \|^{\alpha}) \tag{5.7.59}$$

定理 5.7.2′ 设 $A_t\in SC_n^{\geqslant}(Q)$, $1\leqslant t\leqslant m$, $\alpha\geqslant\frac{1}{2n}$，则

$$\| \sum_{t=1}^{m} A_t \|^{\alpha} \geqslant \sum_{t=1}^{m} \| A_t \|^{\alpha} \tag{5.7.60}$$

证 由定理 5.7.2 及定理 3.3.10 之推论，仿定理 5.7.1′的证明即可证得. □

在定理 5.7.2′中分别令 $\alpha=\frac{1}{n},\frac{1}{2n},1$，则得

推论　设 $A_t \in SC_n^{\geqslant}(Q), 1 \leqslant t \leqslant m$，则

$$\sum_{t=1}^{m} \| A_t \|^{\frac{1}{n}} \leqslant \| \sum_{t=1}^{m} A_t \|^{\frac{1}{n}} \tag{5.7.61}$$

$$\sum_{t=1}^{m} \| A_t \|^{\frac{1}{2n}} \leqslant \| \sum_{t=1}^{m} A_t \|^{\frac{1}{2n}} \tag{5.7.62}$$

$$\sum_{t=1}^{m} \| A_t \| \leqslant \| \sum_{t=1}^{m} A_t \| \tag{5.7.63}$$

定理 5.7.3′　设 $A_{st} \in SC_n^{\geqslant}(Q), \alpha_t \in R, 1 \leqslant s \leqslant m, 1 \leqslant t \leqslant k$，则

1° 当 $A_{st} \geqslant 0, \alpha_t > 0, 1 \leqslant s \leqslant m, 1 \leqslant t \leqslant k, \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \geqslant \frac{1}{2n}$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{k} \| A_{st} \|^{\alpha_t} \leqslant \prod_{t=1}^{k} \| \sum_{s=1}^{m} A_{st} \|^{\alpha_t} \tag{5.7.64}$$

2° 当 $A_{st} \geqslant 0, \alpha_t > 0, 1 \leqslant s \leqslant m, 1 \leqslant t \leqslant k, \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = r \leqslant \frac{1}{2n}$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{k} \| A_{st} \|^{\alpha_t} \leqslant m^{1-2nr} \prod_{t=1}^{k} \| \sum_{s=1}^{m} A_{st} \|^{\alpha_t} \tag{5.7.65}$$

3° 当 $A_{st} > 0, \alpha_t \leqslant 0, 1 \leqslant s \leqslant m, 1 \leqslant t \leqslant k, \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = r$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{k} \| A_{st} \|^{\alpha_t} \geqslant m^{1-2nr} \prod_{t=1}^{k} \| \sum_{s=1}^{m} A_{st} \|^{\alpha_t} \tag{5.7.66}$$

证　利用式(5.7.5)仿定理 5.7.2′的证明即可证得.　□

在定理 5.7.3′中令 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \alpha$，可得

推论 1　设 $A_{st} \in SC_n(Q), 1 \leqslant s \leqslant m, 1 \leqslant t \leqslant k, \alpha \in R$，则

1° 当 $A_{st} \geqslant 0, \alpha \geqslant \frac{1}{2nk}$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{k} \| A_{st} \|^{\alpha} \leqslant \prod_{t=1}^{k} \| \sum_{s=1}^{m} A_{st} \|^{\alpha} \tag{5.7.67}$$

2° 当$A_{st}\geqslant 0, 0<\alpha\leqslant\frac{1}{2nk}$时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}\|A_{st}\|^{\alpha}\leqslant m^{1-2nk\alpha}\prod_{t=1}^{k}\|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\|^{\alpha} \quad (5.7.68)$$

3° 当$A_{st}>0, \alpha\leqslant 0$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\prod_{t=1}^{k}\|A_{st}\|^{\alpha}\geqslant m^{1-2nk\alpha}\prod_{t=1}^{k}\|\sum_{s=1}^{m}A_{st}\|^{\alpha} \quad (5.7.69)$$

在推论 1 中令 $k=1$，可得

推论 2 设 $A_{st}\in SC_n(Q), 1\leqslant s\leqslant m, \alpha\in R$，则

1° 当$A_s\geqslant 0, \alpha\geqslant\frac{1}{2n}$时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\|A_s\|^{\alpha}\leqslant\|\sum_{s=1}^{m}A_s\|^{\alpha} \quad (5.7.70)$$

2° 当$A_s\geqslant 0, 0<\alpha\leqslant\frac{1}{2n}$时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\|A_s\|^{\alpha}\leqslant m^{1-2n}\|\sum_{s=1}^{m}A_s\|^{\alpha} \quad (5.7.71)$$

3° 当$A_s>0, \alpha\leqslant 0$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{m}\|A_s\|^{\alpha}\geqslant m^{1-2n}\|\sum_{s=1}^{m}A_s\|^{\alpha} \quad (5.7.72)$$

当然，按上述方法，我们可把定理 5.7.4～定理 5.7.10 及其推论均可类似地推广到四元数矩阵的重行列式上来，这里我们仅把定理 5.7.10 平移到四元数矩阵的重行列式上来，其他建议读者去完成.

定理 5.7.10′ 设 $A, B\in SC_n^{>}(Q), \alpha\in R, \alpha\geqslant\frac{1}{2n-k}$，则

$$\|(A+B)/(A+B)_k\|^{\alpha}\geqslant\|A/A_k\|^{\alpha}+\|B/B_k\|^{\alpha} \quad (5.7.73)$$

证 因 $A, B\in SC_n^{>}(Q)$，则 $A+B\in SC_n^{>}(Q)$，故由命题 5.7.1 知，$A/A_k, B/A_k, (A+B)/(A+B)_k$ 均为正定自共轭矩

阵,于是由定理 3.3.10 之推论及定理 5.7.10 即知式(5.7.73)成立. □

推论 1 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q),\alpha\in R,\alpha\geqslant\frac{1}{2n-k}$,则

$$\frac{\| A+B\|^{\alpha}}{\| A_k+B_k\|^{\alpha}}\geqslant\frac{\| A\|^{\alpha}}{\| A_k\|^{\alpha}}+\frac{\| B\|^{\alpha}}{\| B_k\|}\tag{5.7.74}$$

证 由定理3.3.8,有

$$\| A\| = \| A_k\| \; \| A/A_k\|,\ 即\ \| A/A_k\| = \frac{\| A\|}{\| A_k\|}$$

同理有 $\| B\| = \| B_k\| \; \| B/B_k\|$, 即 $\| B/B_k\| = \frac{\| B\|}{\| B_k\|}$

$$\| A+B\| = \| (A+B)_k\| \; \| (A+B)/(A+B)_k\|$$

即

$$\| (A+B)/(A+B)_k\| = \frac{\| A+B\|}{\| (A+B)_k\|}$$

于是由上式及式(5.7.73)即知式(5.7.74)成立. □

推论 2 设 $A,B\in SC_n^{>}(Q),\alpha\in R,\alpha\geqslant\frac{1}{2n-k}$,则

$$\| A+B\|^{\alpha}\geqslant\| A\|^{\alpha}\left(1+\frac{\| B_k\|^{\alpha}}{\| A_k\|^{\alpha}}\right)+\| B\|^{\alpha}\left(1+\frac{\| A_k\|^{\alpha}}{\| B_k\|^{\alpha}}\right)\tag{5.7.75}$$

证 由式(5.7.74)及式(5.7.60),有

$$\begin{aligned}\| A+B\|^{\alpha} &\geqslant\frac{\| A_k+B_k\|^{\alpha}\| A\|^{\alpha}}{\| A_k\|^{\alpha}}+\frac{\| A_k+B_k\|^{\alpha}\| B\|^{\alpha}}{\| B_k\|^{\alpha}}\\ &\geqslant\frac{(\| A_k\|^{\alpha}+\| B_k\|^{\alpha})\| A\|^{\alpha}}{\| A_k\|^{\alpha}}\\ &\quad+\frac{(\| A_k\|^{\alpha}+\| B_k\|^{\alpha})\| B\|^{\alpha}}{\| B_k\|^{\alpha}}\end{aligned}$$

$$= \| A \|^{\alpha}\left(1 + \frac{\| B_k \|^{\alpha}}{\| A_k \|^{\alpha}}\right)$$

$$+ \| B \|^{\alpha}\left(1 + \frac{\| A_k \|^{\alpha}}{\| B_k \|^{\alpha}}\right)$$

故式(5.7.75)成立. □

定理 5.7.11 设 $A = \begin{pmatrix} A_k & B \\ B^* & D \end{pmatrix} \in SC_n^{>}(Q)$, $A_k \in Q^{k \times k}$, 则

$$\| A \| \leqslant \| A_k \| \ \| D \| \tag{5.7.76}$$

证 由定理 3.3.8 知

$$\| A \| = \| A_k \| \ \| D - B^* A_k^{-1} B \| \quad ①$$

又 $D \in SC_{n-k}^{>}(Q)$, 且 $B^* A_k^{-1} B \in SC_{n-k}^{\geqslant}(Q)$, 于是由式(5.7.56), 知

$$\| D - B^* A_k^{-1} B \| \leqslant \| D \| - \| B^* A_k^{-1} B \| \leqslant \| D \| \quad ②$$

从而由式①,②即知式(5.7.76)成立. □

推论 1 设 $A = (a_{ij}) \in SC_n^{>}(Q)$, 且 A 可分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rr} \end{pmatrix} \tag{5.7.77}$$

其中 $A_{ii}(i = 1, 2, \cdots, r)$ 均为方阵, 则

$$\| A \| \leqslant \| A_{11} \| \cdot \| A_{22} \| \cdots \| A_{rr} \| \tag{5.7.78}$$

特别地有

$$\| A \| \leqslant \| a_{11} \| \cdot \| a_{22} \| \cdots \| a_{nn} \| \tag{5.7.79}$$

推论 2 设 $A = (a_{ij}) \in SC_n^{>}(Q)$, 且 A 可分块为(5.7.77), 则

$$| A | \leqslant | A_{11} | \, | A_{22} | \cdots | A_{rr} | \tag{5.7.80}$$

特别地有

$$| A | \leqslant a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}. \tag{5.7.81}$$

关于四元数亚(半)正定阵的重行列式的不等式, 我们有如下

定理 5.7.12 设 $A\in P_n^{>}(Q)$,$\alpha\in R^+$,则

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 时,有

$$\|A\|^{\alpha}\geqslant\|R(A)\|^{\alpha}+\|S(A)\|^{\alpha}\qquad(5.7.82)$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{n}$ 时,有

$$\|A\|^{\alpha}\geqslant 2^{n\alpha-1}(\|R(A)\|^{\alpha}+\|S(A)\|^{\alpha})\qquad(5.7.83)$$

证 因 $A\in P_n^{\geqslant}(Q)$,则 $R(A)\in SC_n^{\geqslant}(Q)$,由定理 4.3.3,存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$P^*R(A)P=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)\qquad ①$$

其中 $a_t=1$ 或 $0,1\leqslant t\leqslant n$,又 $S(A)\in SC_n^-(Q)$,则 $P^*S(A)P\in SC_n^-(Q)$. 于是由命题 5.6.9 知,存在 $V\in U^{n\times n}$,使

$$V^*PS(A)PV=\mathrm{diag}(b_1\mathrm{i},\cdots,b_n\mathrm{i})\qquad ②$$

其中 $b_t\in R,1\leqslant t\leqslant n$,于是有

$$V^*P^*APV=\mathrm{diag}(a_1+b_1\mathrm{i},\cdots,a_n+b_n\mathrm{i})\qquad ③$$

在式③两端取重行列式,由定理 3.3.3,并注意到 $\|V^*V\|=1$,则可得

$$\|P^*P\|^{\alpha}\|A\|^{\alpha}=\prod_{t=1}^{n}(a_t^2+b_t^2)^{\alpha}\qquad ④$$

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 时,由 Hölder 不等式(5.2.28)′及式①,②,得

$$\begin{aligned}\prod_{t=1}^{n}(a_t^2+b_t^2)^{\alpha}&\geqslant\Big(\prod_{t=1}^{n}a_t^2\Big)^{\alpha}+\Big(\prod_{t=1}^{n}b_t^2\Big)^{\alpha}\\&=\|P^*R(A)P\|^{\alpha}+\|P^*S(A)P\|^{\alpha}\\&=\|P^*P\|^{\alpha}(\|R(A)\|^{\alpha}+\|S(A)\|^{\alpha})\qquad ⑤\end{aligned}$$

注意式 $\|P^*\|>0$,于是由式④,⑤即得式(5.7.82)成立.

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{n}$ 时,由 Hölder 不等式(5.2.23)及式①,②仿 1° 之证明,即可得式(5.7.83). □

定理 5.7.13 设 $A\in SC_n^{>}(Q)$，$B\in P_n^{\geqslant}(Q)$，$\alpha\in R^+$，则

1° 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{n}$ 时，有

$$\|A+B\|^{\alpha}\geqslant\|A\|^{\alpha}+\|B\|^{\alpha} \tag{5.7.84}$$

2° 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{n}$ 时，有

$$\|A+B\|^{\alpha}\geqslant 2^{n\alpha-1}(\|A\|^{\alpha}+\|B\|^{\alpha}) \tag{5.7.85}$$

3° $$\|A+B\|^{\frac{1}{n}}\geqslant\|A\|^{\frac{1}{n}}+\|B\|^{\frac{1}{n}} \tag{5.7.86}$$

4° $$\|A+B\|\geqslant\|A\|+\|B\| \tag{5.7.87}$$

证明 由 $A\in SC_n^{>}(Q)$ 及定理 4.3.2 知，存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$A=PP^* \quad ①$$

又由 $B\in P_n^{\geqslant}(Q)$，及命题 5.6 知，$P^{-1}B(P^*)^{-1}\in P_n^{\geqslant}(Q)$，于是由命题 5.6.4 知，存在 $V\in U^{n\times n}$，使

$$P^{-1}B(P^*)^{-1}=VGV^*, \quad ②$$

其中 $$G=\begin{pmatrix} a_1+b_1\mathrm{i} & & * \\ & \ddots & \\ & & a_n+b_n\mathrm{i}\end{pmatrix}, a_t, b_t\in R, a_t\geqslant 0, 1\leqslant t\leqslant n$$

②

于是 $$B=PVGV^*P^*$$

从而 $$\begin{aligned} A+B &= PP^*+PVGV^*P^* \\ &= P(I+VGV^*)P^*=P(VV^*+VGV^*)P^* \\ &= PV(I+G)V^*P^* \end{aligned} \quad ④$$

由式①，②，③，④及定理 3.3.3，有

$$\begin{aligned} \|A+B\|^{\alpha} &= \|P\|^{\alpha}\|V\|^{\alpha}\|I+G\|^{\alpha}\|V^*\|^{\alpha}\|P^*\|^{\alpha} \\ &= \|PP^*\|^{\alpha}\|I+G\|^{\alpha} \\ &= \|PP^*\|^{\alpha}\prod_{t=1}^{n}[(1+a_t)^2+b_t^2]^{\alpha} \end{aligned}$$

$$\geqslant \| PP^* \|^{\alpha} \prod_{t=1}^{n} [1+(a_t^2+b_t^2)]^{\alpha} \tag{⑤}$$

1° 当$\alpha > \frac{1}{n}$时，由 Hölder 不等式(5.2.28)′，有

$$\| PP^* \|^{\alpha} \prod_{t=1}^{n} [1+(a_t^2+b_t^2)]^{\alpha}$$

$$\geqslant \| PP^* \|^{\alpha} + \| PP^* \|^{\alpha} \left[\prod_{t=1}^{n} (a_t^2+b_t^2) \right]^{\alpha}$$

$$= \| A \|^{\alpha} + \| B \|^{\alpha} \tag{⑥}$$

从而由式⑤,⑥即得式(5.7.84)成立.

2° 当$0<\alpha \leqslant \frac{1}{n}$时，由 Hölder 不等式(5.2.29)′，有

$$\| PP^* \|^{\alpha} \prod_{t=1}^{n} [1+(a_t^2+b_t^2)]^{\alpha}$$

$$\geqslant 2^{n\alpha-1} \| PP^* \|^{\alpha} \left[\left(\prod_{t=1}^{n} 1 \right)^{\alpha} + \prod_{t=1}^{n} (a_t^2+b_t^2)^{\alpha} \right]$$

$$= 2^{n\alpha-1} \left\{ \| PP^* \|^{\alpha} \| PP^* \|^{\alpha} \left[\prod_{t=1}^{n} (a_t^2+b_t^2) \right]^{\alpha} \right\}$$

$$= 2^{n\alpha-1} (\| A \|^{\alpha} + \| B \|^{\alpha}) \tag{⑦}$$

于是由式⑤与⑦即知式(5.7.85)成立.

3° 在式(5.7.84)中令 $\alpha = \frac{1}{n}$ 即得式(5.7.86)

4° 在式(5.7.84)中令 $\alpha = 1$ 即得式(5.7.87) □

推论 1 设 $A \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$B \in P_n^{\geqslant}(Q)$，则仍分别有式(5.7.84)，(5.7.85)，(5.7.86)，(5.7.87)成立.

推论 2 设 $A \in SC_n^{\geqslant}(Q)$，$B \in P_n^{\geqslant}(Q)$，$\alpha \in R^+$，则

1° 当$\alpha \geqslant \frac{1}{n}$时，有

$$\| A+B \|^{\alpha} \geqslant \| A \|^{\alpha} + \| R(B) \|^{\alpha} + \| S(B) \|^{\alpha} \tag{5.7.88}$$

2° 当$0<\alpha \leqslant \frac{1}{n}$时，有

$$\| A+B \|^{\alpha} \geqslant 4^{n\alpha-1}(\| R(A) \|^{\alpha} + \| S(A) \|^{\alpha} + 2^{n\alpha-1} \| B \|^{\alpha}) \tag{5.7.89}$$

证 由定理 5.7.12 及定理 5.7.13 即得. □

第六章　四元数体上的二次型与四元数矩阵的正定性

在复数域上的线性代数理论中，二次型及其标准形的分类和正定的判定以及与此相联系的矩阵的正定性问题具有重要的意义. 同样在四元数体上的类似问题当然也十分重要. 在这一章里，我们将讨论四元数体上的二次型与四元数矩阵的正定性.

§6.1　四元数体上的二次型

定义 6.1.1　设 $A\in SC_n(Q)$，$x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$，则称

$$f(x_1,\cdots,x_n)=x^*Ax \tag{6.1.1}$$

为四元数体上的**二次型**. 若记 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则有

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_ia_{ij}x_j \tag{6.1.2}$$

定义 6.1.2　若二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=x^*Ax>0$ 对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$ 都成立，则称二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是**正定二次型**；若 $f(x_1,\cdots,x_n)=x^*Ax\geqslant 0$ 对任意 $x\in Q^{n\times 1}$ 都成立，则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为**半正定二次型**.

由(半)正定二次型的定义 6.1.2 及(半)正定矩阵的定义 2.2.2，即得如下

命题 6.1.1　设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是式(6.1.1)定义的二次型,则

1°　x^*Ax 为正定二次型 $\Leftrightarrow A$ 正定;

2°　x^*Ax 为半正定二次型 $\Leftrightarrow A$ 半正定.

由 $A\in SC_n(Q)$ 及命题 2.2.1 知,对任意的 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$ 有 $f(x_1,\cdots,x_n)=x^*Ax\in R$,且由命题 3.3.1 知,必存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$(此处 P 是一系列初等矩阵 $P(i,j)$ 和 $P(i,j_\lambda)$ 的乘积而成的广义酉阵),使

$$P^*AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_t\in R,1\leqslant t\leqslant n$$

因此,对二次型(6.1.1),若令 $y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$, $y=P^{-1}x$(即 $x=Py$),则有

$$x^*Ax=y^*P^*APy=y^*\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}y$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{y}_iy_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|y_i|^2 \qquad (6.1.3)$$

我们称式(6.1.3)为二次型(6.1.1)的**标准型**.

由此可知,四元数体上二次型的标准形及其分类与复(实)二次型是相同的.

定理 6.1.1　二次型 $f=x^*Ax$ 为(半)正定的充要条件是其标准形(6.1.3)中的系数皆为正(非负),即存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$P^*AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_t>0(\geqslant 0),1\leqslant t\leqslant n \qquad (6.1.4)$$

证　由命题 6.1.1 与定理 4.1.14,定理 4.3.2 及定理 4.3.4 即得. □

推论　若二次型 $f=x^*Ax$ 是(半)正定的,则 $|A|>0(\geqslant 0)$

定理 6.1.2 二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=x^*Ax$ 为(半)正定的充要条件是 A 的各阶顺序主子式皆 $>0(\geqslant 0)$.

证 必要性由定理 4.3.8 即知,下证充分性.

用数学归纳法.当 $n=1$ 时,结论显然成立.设 $n-1$ 阶时结论成立,我们来证明 n 阶时结论亦成立.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$的各阶顺序主子式皆为正,要证 x^*Ax 是正定的.

把 A 分块为

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^* & a_{nn} \end{pmatrix},\text{其中 } A_1\in Q^{(n-1)\times(n-1)},\alpha=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix} \quad ①$$

由假设知,A_1 的各阶顺序主子式皆为正,从而由归纳假设知,A_1 是正定的,故由定理 4.3.6 知,$|A_1|>0$.且由命题 3.3.1 之推论及定理 3.3.11 知,存在可逆阵 $S\in Q^{(n-1)\times(h-1)}$,且 S 是一系列 $(n-1)$阶初等矩阵 $P(i,j)$与 $P(i,j_\lambda)$的乘积,使

$$S^*A_1S=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix},\lambda_t>0,1\leqslant t\leqslant n-1 \quad ②$$

于是由式②及定理 3.2.6 之推论知

$$|A_1|=|S^*A_1S|=\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}>0 \quad ③$$

令 $\beta=-A_1^{-1}\alpha$,则 $\beta^*=-\alpha*(A_1^{-1})^*$,$\beta^*A_1^*=-\alpha^*$,于是由式①有

$$\begin{pmatrix} S^* & 0 \\ \beta^* & 1 \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} S & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S^* & 0 \\ \beta^* & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^* & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} S^*A_1S & 0 \\ 0 & a_{nn}-\beta^*(A_1^{-1})^*\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad ④$$

其中 $\lambda_n = a_{nn} - \beta^*(A_1^{-1})^*\beta$. 显然$\begin{pmatrix} S & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$可分解为一系列 n 阶初等矩阵$P(i,j)$与 $P(i,j_\lambda)$的乘积,故由定理 3.2.6 之推论与式④,有

$$|A| = \det\begin{pmatrix} S^* & 0 \\ \beta^* & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} S & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = |A_1|\lambda_n \qquad ⑤$$

由已知$|A|>0$,且由式③,有$|A_1|>0$,从而由式⑤知,$\lambda_n>0$,由式④知,矩阵 A 相合于正实对角阵$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,而 Λ 显然是正定的,故由定理 4.3.4 即知 A 也是正定的,从而 x^*Ax 是正定二次型. 半正定的情形同理可证. □

推论 $A \in SC_n(Q)$,则 A 为(半)正定的充要条件是 A 的各阶顺序主子式皆$>0(\geqslant 0)$.

由此,我们看到,有关四元数体上二次型问题的结论与实数域上二次型的有关结论十分类似.

§6.2 四元数正定矩阵

我们在前面各章节已给出了四元数正定矩阵的定义(见定义 2.2.2)及一些简单性质与判定. 本节将较系统地讨论四元数正定矩阵的若干充要条件以及正定矩阵运算的封闭性.

所谓 $A \in Q^{n\times n}$是(半)正定的,是指 A 是自共轭的,且对任意 $0 \neq x \in Q^{n\times 1}$,有 $x^*Ax>0(\geqslant 0)$.

定理 6.2.1 下列命题是等价的:

1° A 是正定矩阵,即 $A \in SC_n^>(Q)$;

2° A 的正惯性指数为 n;

3° A 与单位阵 I_n 相合;

4° 存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使 $A=P^*P$；

5° 存在可逆上三角阵 V，使 $A=V^*V$；

6° 存在 $B\in Q^{m\times n}$，$\text{rank}B=n$，使 $A=B^*B$；

7° 对任意可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，P^*AP 正定；

8° 对任意 $U\in U^{n\times n}$，U^*AU 正定；

9° A 的特征值均为正数；

10° 对任意正整数 α，存在正定阵 $S\in Q^{n\times n}$，使 $A=S^{\alpha}$；

11° A 的所有主子式 >0；

12° A 的所有顺序主子式 >0；

13° 对任意实数 $k>0$，kA 正定；

14° A^{-1} 存在，且 A^{-1} 正定.

证 1°⇒2° 假设 A 的正惯性指数 $s<n$，则由定理 4.3.1 知，存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使 $P^*AP=\begin{pmatrix} I_s & & \\ & I_t & \\ & & 0\end{pmatrix}$，$s<n$.

令 $y_0=(\overbrace{0,\cdots,0}^{s\uparrow},1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$，则 $x_0=Py_0\neq 0$，且

$$y_0^*\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0\end{pmatrix}y_0=-t\leqslant 0$$

这与 A 正定矛盾，故 2°成立.

2°⇒3° 设 A 的正惯性指标为 n，由定理 4.3.1 知，存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使 $P^*AP=I_n$，即 A 与 I_n 相合.

3°⇒4° 设 A 与 I_n 相合，由相合定义，存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使 $A=P^*I_nP=P^*P$.

4°⇒5° 若 $A=P^*P$，而 P 可逆，由命题 4.1.4 知，$P=UV$，其中 $U\in U^{n\times n}$，V 为可逆的上三角阵，则 $A=P^*P=(UV)^*(UV)=V^*U^*UV=V^*V$.

$5^\circ \Rightarrow 4^\circ$ 显然；

$4^\circ \Rightarrow 6^\circ$　若存在可逆阵 $P \in Q^{n\times n}$，使 $A = P^* P$，取 $B = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$，则 $A = P^* P = B^* B$，$\text{rank}B = \text{rank}P = n$.

$6^\circ \Rightarrow 7^\circ$　因为 $A = B^* B$，$\text{rank}B = n$，则对任意可逆阵 $P \in Q^{n\times n}$，对任意 $0 \neq x \in Q^{n\times 1}$，有 $BPx \neq 0$，且

$$x^*(P^* AP)x = (BPx)^*(BPx) > 0$$

故 $P^* AP$ 正定.

$7^\circ \Rightarrow 8^\circ$　显然.

$8^\circ \Rightarrow 9^\circ$　因对任意 $U \in U^{n\times n}$，有 $U^* AU \in SC_n(Q)$，则 $A \in SC_n(Q)$，于是由定理 4.1.4 之推论 2 知，A 与 $U^* AU$ 有相同的特征值，设为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 假定有某个 $\lambda_t \leqslant 0$，由定理 4.1.4，存在 $U_0 \in U^{n\times n}$，使

$$U_0^* U^* AUU_0 = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

令 $y_0 = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}} \in Q^{n\times 1}$，其中 1 在第 t 个位置，则 $x_0 = UU_0 y_0 \neq 0$，且

$$x_0^* U^* AUx_0 = y_0^* \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) y_0 = \lambda_t \leqslant 0$$

这与 $U^* AU$ 正定矛盾，故 9° 成立.

$9^\circ \Leftrightarrow 1^\circ$　由定理 4.1.14 推论 1 之 1° 即得.

$1^\circ \Leftrightarrow 10^\circ$　由命题 5.1.1 即得.

$1^\circ \Rightarrow 11^\circ$　设 $A = (a_{ij})$，$a_{ij} = a_{ji}$，$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，$A$ 的第 $i_1, \cdots i_k$ 行和等 $i_1, \cdots, i_k$ 列构成的主子阵记为

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} \cdots a_{i_1 i_k} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{i_k i_1} \cdots a_{i_k i_k} \end{pmatrix}$$

则 $A_0 \in SC_k(Q)$，又记 $x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in Q^{n\times 1}$ 中除 $x_{i1}, x_{i2} \cdots$

x_{ik}外，其余分量全取 0 的向量 X 记为 X_k，并记 $X_{Ak}=(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})^{\mathrm{T}}\in Q^{k\times 1}$，对于任意 $0\neq X_{Ak}\in Q^{k\times 1}$，相应有 $X_k\neq 0$，且

$$(X_{Ak})^* A_k X_{kk}=X_k^* A X_k>0.$$

故 $A_0\in SC_k(Q)$，由 9° 知 A_k 的特征值全为正数，从而由定理 4.3.5 知 $\det A_k>0$，故 11°成立.

11°⇒12°　显然.

1°⇔12°　由定理 6.1.2 之推论即得.

1°⇒13°　对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，$k>0$，则

$$x^*(kA)x=k(x^*Ax)>0$$

故 $kA\in SC_n^{>}(Q)$.

13°⇒1°　kA 正定，$k>0$，则 $k^{-1}>0$，于是$\frac{1}{k}(kA)=A$ 正定.

1°⇒14°　对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，有

$$x^*A^{-1}x=(x^*A^{-1})A(A^{-1}x)=(A^{-1}x)^*A(A^{-1}x)>0$$

这是因为当 $x\neq 0$ 时，$A^{-1}x\neq 0$ 以及 A 正定所致.

14°⇒1°　A^{-1}正定，则 $A=(A^{-1})^{-1}$正定.　□

下面，我们讨论四元数矩阵运算的一些封闭性质.

定理 6.2.2　正定阵的和仍是正定阵，即若 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$，则 $A+B\in SC_n^{>}(Q)$.

证　当 $A,B\in SC_n^{>}(Q)$时，显然有 $A+B\in SC_n(Q)$，对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，有

$$x^*(A+B)x=x^*Ax+x^*Bx>0$$

故 $A+B\in SC_n^{>}(Q)$.　□

定理 6.2.3　设 $A\in SC_n^{>}(Q)$，$\forall\,\alpha\in R$，，则 $A^{\alpha}\in SC_n^{>}(Q)$.

证　由命题 5.1.1 即得.　□

推论　设 $A\in SC_n^{>}(Q)$，$f(x)$是 R 上的多项式，则 $f(A)\in SC_n^{>}(Q)$.

定理 6.2.4 $A\in SC_n^>(Q)$，A 的逆阵 A^{-1} 与伴随阵 $\tilde{A}\in SC_n^>(Q)$.

证 由定理 6.2.1 即知. □

定理 6.2.5 设 $A_1,\cdots,A_m\in SC_n^>(Q)$，则它们的直和 $A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_m\in SC_n^>(Q)$，此处 $A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_m=\overset{m}{\underset{t=1}{\oplus}}A_t\triangleq\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_m)$ 为对角分块矩阵，其中 $A_t\in Q^{n_t\times n_t}(t=1,\cdots,m)$，且 $n_1+\cdots+n_m=n$.

证 $A_1\oplus\cdots\oplus A_m$ 的特征值为各 A_t 的特征值的全体($t=1,\cdots,m$)，因为都是正数，又 $(\overset{m}{\underset{t=1}{\oplus}}A_t)^*=\overset{m}{\underset{t=1}{\oplus}}A_t^*=\overset{m}{\underset{t=1}{\oplus}}A_t$，故 $\overset{m}{\underset{t=1}{\oplus}}A_t\in SC_n^>(Q)$. □

定理 6.2.6 设 $A,B\in SC_n^>(Q)$，则 $ABA,BAB\in SC_n^>(Q)$.

证 因为 A 正定，则 $A^*=A$，且 A 可逆，由 $A^*BA=ABA$ 知，ABA 相合于 B，又 B 是正定矩阵，故由定理 4.3.8 即知 ABA 亦是正定阵，即 $ABA\in SC_n^>(Q)$，同理可证 $BAB\in SC_n(Q)$. □

定理 6.2.7 设 $A\in SC_n^>(Q)$，$B\in Q^{n\times m}$，则 $B^*AB\in SC_m^{\geqslant}(Q)$.

证 对任意 $x=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}\in Q^{m\times 1}$，有

$$x^*(B^*AB)x=(Bx)^*A(Bx)\geqslant 0$$

又
$$(B^*AB)^*=B^*A^*B=B^*AB,$$

故
$$B^*AB\in SC_m^{\geqslant}(Q).$$
□

定理 6.2.8 设 $A,B\in SC_n^>(Q)$，则 $AB\in SC_n^>(Q)\Leftrightarrow AB=BA$.

证 "$\Rightarrow$" 设 $A,B,AB\in SC_n^>(Q)$，则 $AB=(AB)^*=B^*A^*=BA$

"$\Leftarrow$" 由定理 4.3.13 即得. □

定理 6.2.9 设 $A,B\in SC_n^>(Q)$，则 $A^{-1}B\in SC_n^>(Q)\Leftrightarrow AB$

$=BA$;同样 $BA^{-1}\in SC_n^{>}(Q)\Leftrightarrow AB=BA$.

证 由 $A\in SC_n^{>}(Q)$ 及定理 6.2.1 之 14°知 $A^{-1}\in SC_n^{>}(Q)$,又 $A^{-1}B=BA^{-1}$ 当且仅当 $AB=BA$;再由定理 6.2.8 知($A^{-1}B$)(或 BA^{-1})$\in SC_n^{>}(Q)$ 当且仅当 $A^{-1}B=BA^{-1}$,故命题结论成立. □

定理 6.2.10 设 $A\in SC_n^{>}(Q)$,$f(x)$ 是实系数一元多项式,则 $f(A)\in SC_n^{>}(Q)\Leftrightarrow f(\lambda_t)>0(1\leqslant t\leqslant n)$,$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

证 因 $A\in SC_n^{>}(Q)$,$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值,则由命题 5.1.1 之 6°知 $f(A)\in SC_n(Q)$,且 $f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 的 n 个特征值,于是由定理 6.2.1 之 10°与 9°即知本命题成立. □

命题 6.2.1 设 $A,B\in SC_n(Q)$,则 A,B 能用同一个 $U\in U^{n\times n}$ 化为实对角阵 UAU^* 与 UBU^* 之充要条件为 $AB=BA$,此时 UAU^* 与 UBU^* 的主对角元素分别为 A 与 B 的特征值.

证 "必要性". 设有 $U\in U^{n\times n}$,使

$$UAU^*=\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix},\quad UBU^*=\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}$$

则由定理 4.1.14 知,$a_1,\cdots,a_n$ 与 $b_1,\cdots,b_n$ 恰好分别为 A 与 B 的全部特征值,从而均为实数,故此两对角阵可换,即

$$UABU^*=(UAU^*)(UBU^*)=(UBU^*)(UAU^*)=UBAU^*$$

从上式两边消去 U 与 U^*,即得 $AB=BA$.

"充分性" 设 $AB=BA$,首先由定理 4.1.14 知,有 $U\in U^{n\times n}$,使

$$UAU^*=\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}=D \qquad ①$$

因为置换矩阵 $P(i,j)$(即把 I_n 的 i,j 两行互换而得的矩阵)是特殊的广义酉矩阵,故不妨设式①中的对角矩阵是这样的,其相等的

元素是连着排下来的.于是由式①及 $AB=BA$,有

$$D(UBU^*)=UABU^*=UBAU^*=(UBU^*)D \qquad ②$$

为了便于陈述,可再把 D 明确地设为

$$D=a_1I_{n_1}\oplus a_2I_{n_2}\oplus\cdots\oplus a_sI_{n_s},\ n_1+\cdots+n_s=n$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 为互不相等的实数($s\leqslant n$),于是由式②,有

$$UBU^*=B_1\oplus B_2\oplus\cdots\oplus B_s$$

再由 $B_1,B_2,\cdots,B_s$ 均为自共轭阵,从而分别有广义酉矩阵 U_1,$U_2,\cdots,U_s$,使

$$U_1B_1U_1^*,U_2B_2U_2^*,\cdots,U_sBU_s^*$$

均为实对角阵,设其分别为

$$\begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{1n_1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} b_{21} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{2n_2}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} b_{s1} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{sn_s}\end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{pmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_s\end{pmatrix}(UBU^*)\begin{pmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_s\end{pmatrix}^*$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & b_{1n_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & b_{s1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & b_{sn_s}\end{pmatrix}=G,$$

$$\begin{pmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_s\end{pmatrix}(UAU^*)\begin{pmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_s\end{pmatrix}^*$$

$$=\begin{pmatrix} a_1I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_sI_{n_s}\end{pmatrix}=D$$

故只要取

$$P=\begin{pmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_s \end{pmatrix}U$$

则 P 为广义酉矩阵,且 PBP^* 与 PAP^* 就分别为实对角阵 G 与 D,又由定理4.1.17知,酉相似变换不改变自共轭阵的特征值,故 D 与 G 的主对角线上的元素分别为自共轭矩阵 A 与 B 的特征值.

□

下面再给出命题6.2.1的推广结果:

命题6.2.2 m 个同阶的自共轭阵 $A_1,\cdots,A_m$ 能由一个广义酉矩阵 U 同时化为实对角矩阵之充要条件是它们彼此可换.

证 "必要性" 由命题6.2.1即知

"充分性" 当 $m=2$ 时,由命题6.2.1知结论成立.假设对 $m-1$ 个矩阵来说,结论成立.我们来看 m 个自共轭阵 $A_1,\cdots,A_m$.首先由定理4.1.14知,对 A_1,有 $V\in U^{m\times n}$,使

$$VA_1V^*=\lambda_1I_{n_1}\oplus\cdots\oplus\lambda_sI_{n_s}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为不同的实数,仿命题6.2.1之证法知,必有

$$VA_iV^*=A_{i1}\oplus A_{i2}\oplus\cdots\oplus A_{is}(i=2,\cdots,m)$$

其中 $A_{ij}\in SC_{nj}(Q)(i=2,\cdots,m,j=1,\cdots,s)$.由于诸 A_i 可换,从而诸 $VA_iV^*(i=2,\cdots,m)$可换,又从而知诸 $A_{i1}(i=2,\cdots,m)$彼此可换;诸 $A_{i2}(i=2,\cdots,m)$彼此可换;…;诸 $A_{is}(i=2,\cdots,m)$彼此可换.故由归纳法假设知,有广义酉矩阵 U_1,能同时化诸 $A_{i1}(i=2,\cdots,m)$成实对角阵;有广义酉矩阵 U_2 能同时化诸 $A_{i2}(i=2,\cdots,m)$成实对角阵;…;有广义酉矩阵 U_s 能同时化诸 $A_{is}(i=2,\cdots,m)$成实对角阵.令

$$U=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_s$$

则 U 为广义酉矩阵,且

$$U(VA_1V^*)U^*=\lambda_1 I_{n_1}\oplus\lambda_2 I_{n_2}\oplus\cdots\oplus\lambda_s I_{n_s}$$

$$U(VA_iV^*)U^*=D_i\ (i=2,\cdots,m)$$

其中 $D_i(i=2,\cdots,m)$为实对角阵.故广义酉矩阵 $UV=W$ 即能同时把诸 A_i 化为实对角阵.归纳法完成. □

定理 6.2.11 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$为 m 元实系数多项式,$A_1,\cdots,A_m\in Q^{n\times n}$为两两乘法可换的正定矩阵,若对 A_1 的任一特征值 λ,A_2 的任一特征值 μ,$\cdots$,A_m 的任一特征值 γ 都有 $f(\lambda,\mu,\cdots,\gamma)>0$,则 $f(A_1,A_2,\cdots,A_m)$是正定矩阵.

证 因 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是两两乘法可换的四元数正定矩阵,则由命题 6.2.2 知,存在共同的 $U\in U^{n\times n}$,使诸 UA_iU^* $(1\leqslant i\leqslant m)$为实对角阵.即

$$UAU^*=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)\text{为 }A_1\text{ 的特征值;}$$

$$UA_2U^*=\begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix},\mu_i(1\leqslant i\leqslant n)\text{为 }A_2\text{ 的特征值;}$$

$\cdots\ \cdots\qquad\cdots\ \cdots$

$$UA_mU^*=\begin{pmatrix}\gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_n\end{pmatrix},\gamma_i(1\leqslant i\leqslant n)\text{为 }A_m\text{ 的特征值.}$$

于是,有

$$Uf(A_1,\cdots,A_m)U^*=\begin{pmatrix}f(\lambda_1,\mu_1,\cdots,\gamma_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n,\mu_n,\cdots,\gamma_n)\end{pmatrix}$$

则 $f(A_1,A_2,\cdots,A_m)$的特征值为 $f(\lambda_1,\mu_1,\cdots,\gamma_1),\cdots,f(\lambda_n,\mu_n,\cdots,\gamma_n)$.由假设它们都是正数,又 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两乘法可换,可得:

$$(f(A_1,A_2,\cdots,A_m))^* = f(A_1,A_2,\cdots,A_m)$$

故 $f(A_1,A_2,\cdots,A_m)$是正定阵. □

定理 6.2.12 设 $A\in Q^{n\times n}$,A 为正定阵,则 A 的任意 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$阶顺序主子式 A_k 及 A 关于 A_k 的 Schur 补 A/A_k 都是正定的.

证 此即命题 5.7.1. □

下面再给出四元数矩阵为正定的几个充分判据.

定理 6.2.13 设 $A\in SC_n(Q)$,若存在 A 的某个 k 阶$(1\leqslant k\leqslant n-1)$的顺序主子阵 A_k 及 A_k 的 Schur 补 A/A_k 都是正定的,则 A 是正定的.

证 将 A 分块为:

$$A=\begin{pmatrix} A_k & B \\ B^* & A_{n-k} \end{pmatrix}$$

因 A_k 正定,故 A_k^{-1} 存在且也是正定的,令

$$P=\begin{pmatrix} I_k & -A_k^{-1}B \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

则 P 可逆,于是有

$$\begin{aligned} P^*AP &= \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -B^*A_k^{-1} & I_{n-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_k & B \\ B^* & A_{n-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & -A_k^{-1}B \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A_{n-k}-B^*A_k^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A/A_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因为已知 A_k 与 A/A_k 都是正定的,故由上式及定理 6.2.5 知,P^*AP是正定的. 从而由定理 4.3.4 知 A 是正定的. □

推论 设 $A=\begin{pmatrix} a & \alpha \\ \alpha^* & A_1 \end{pmatrix}\in SC_n(Q)$,$A$ 正定的充要条件是 $a>0$,且 $A_1-\frac{1}{a}\alpha^*\alpha$ 正定.

注 此推论可称为正定矩阵的**降阶判定法**.

定理 6.2.14 设 $A,B\in Q^{n\times n}$，B 正定，$AB=BA$，则 AB 正定$\Leftrightarrow A$ 正定.

证 "$\Leftarrow$" 同定理6.2.8的充分性.

"$\Rightarrow$" 由 B 正定，$AB=BA$，AB 正定，可知，A 是自共轭阵，因否则，有 $A^*\neq A$，于是 $(AB)^*=(BA)^*=A^*B^*=A^*B\neq AB$，与 $AB\in SC_n(Q)$ 矛盾. 由 A,B 同为自共轭阵及 $AB=BA$，于是由命题6.2.1知，存在同一 $U\in U^{n\times n}$，使

$$A=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)U^*,\lambda_t\in R(1\leqslant t\leqslant n) \quad ①$$

$$B=U\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)U^*,0\leqslant\mu_t\in R(1\leqslant t\leqslant n) \quad ②$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 与 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 分别为 A 与 B 的特征值.

现假设 A 不是正定矩阵，则存在 $\lambda_0\leqslant 0$，而由式①，②，有

$$AB=U\mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_n)$$

其中有一个 $\lambda_0\mu_0\leqslant 0$，这与 AB 是正定的相矛盾，故 A 必是正定的. □

命题 6.2.3 Q 上 m 阶中心封闭阵 A(见定义4.1.5)与 R 上 n 阶对称矩阵 B 的直积仍然中心封闭，且若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 与 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 分别是 A 与 B 的(实)特征值，则 $\lambda_i\mu_i$ 全是 $A\otimes B$ 的特征值，$i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n$.

证 因 A 中心封闭，则存在 Q 上的 m 阶可逆阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m),\lambda_i\in R,1\leqslant i\leqslant m$$

又因 B 实对称，则存在 n 阶实正交阵 U，使得

$$U^{-1}BU=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n),\mu_j\in R,1\leqslant j\leqslant n$$

于是由式(2.1.21)，(2.1.22)，有

$$\begin{aligned}&(P\otimes U)^{-1}(A\otimes B)(P\otimes U)\\&=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\otimes\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)\\&=\mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_1\mu_n,\cdots,\lambda_m\mu_1,\cdots,\lambda_m\mu_n)\end{aligned}$$

由上式可知，$A\otimes B$ 中心封闭，且 $\lambda_i\mu_j$ 是 $A\otimes B$ 的(实)特征值，$i=$

$1,\cdots,m;j=1,\cdots,n.$ □

推论 Q 上的 m 阶自共阵 A 与 R 上 n 阶对称阵 B 的直积 $A\otimes B$ 必是 Q 上的自共轭阵，且 $\lambda_i\mu_j$ 是 $A\otimes B$ 的特征值，其中 λ_i 与 μ_j 分别是 A 与 B 的（实）特征值，$i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n$.

定理 6.2.15 Q 上的 m 阶正定阵 A 与 R 上的 n 阶正定阵 B 的直积 $A\otimes B$ 仍是 Q 上的正定阵.

证 由命题 6.2.3 之推论知，$A\otimes B$ 是自共轭阵，又由定理 4.1.14 之推论 1 的必要性知，正定阵 A 与 B 的特征值 $\lambda_i>0$ 与 $\mu_j>0(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots n)$，从而由定理 6.2.14 之推论知，$A\otimes B$ 的特征值 $\lambda_i\mu_j>0(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n)$，因此由定理 4.1.14 之推论 1 的充分性即知 $A\otimes B$ 是正定阵. □

下面给出四元数正定矩阵的直积与圈积的正定性的等价条件.

定理 6.2.16 设 A 为四元数矩阵，B 为实正定阵，则下列命题等价：

1° A 是正定的；

2° $A\otimes B$ 是正定的；

3° $B\otimes A$ 是正定的；

4° $A\circ B$ 是正定的；

5° $B\circ A$ 是正定的.

证 1°⇒2° 见定理 6.2.15.

2°⇒1° 设 $A\otimes B$ 正定，B 实正定，则 A 是自共轭的，因若 A 不是自共轭的即 $A^*\neq A$，则由式(2.1.23)知，$(A\otimes B^*)=A^*\otimes B\neq A\otimes B$，这与 $A\otimes B$ 是自共轭的相矛盾. 由 A 是自共轭的（不妨设 A 为 m 阶的），则由定理 4.1.14 知，存在广义酉阵 U，使

$$A=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)U^*,\lambda_i\in R,i=1,\cdots,m,$$

又 B 为正定阵（不妨设为 n 阶的），则存在实正交阵 V，使

$$B = V\mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)V^*, \mu_j > 0, j = 1, \cdots, n.$$

现假设 A 不是正定的，则存在 $\lambda_{i_0} \leqslant 0$. 由式(2.1.23)及(2.1.21)易知

$$(U \otimes V)(U \otimes V)^* = (U \otimes V)(U^* \otimes V^*)$$
$$= UU^* \otimes VV^* = I_m \otimes I_n = I_{mn}$$

故 $U \otimes V$ 仍为广义酉阵，再由式(2,1,21)，有

$$A \otimes B$$
$$= (U \otimes V)[\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \otimes \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)] \otimes (U \otimes V)^*,$$

而其中有 $\lambda_{i_0}\mu_j \leqslant 0 (j = 1, \cdots, n)$. 这与 $A \otimes B$ 是正定的相矛盾. 因此 A 必是正定的.

1°⇒4° 设 A 是正定的，B 是实正定的，则由 2°知，$A \otimes B$ 是正定的，若设 A, B 均为 n 阶的方阵，注意到 $A \circ B$ 是 n^2 阶方阵 $A \otimes B$ 的一个 n 阶主子阵，从而由定理 4.3.8 即知 $A \circ B$ 也是正定的.

4°⇒1° 设 B 是R 上的n 阶正定阵，则存在 R 上的n 阶可逆阵 P，使 $P^* BP = I$，即 $B = (P^{-1})^* P^{-1}$，记 $P^{-1} = (p_{ij})_{n \times n}$，则

$$B = (P^{-1})^* P^{-1} = (b_{ij})_{n \times n}, \ b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}p_{jk}, i, j = 1, \cdots, n.$$

现假设 A 不是正定的，则存在 $0 \neq y = (y_1, \cdots, y_n)^T \in Q^{n \times 1}$，使 $y^* Ay \leqslant 0$，令 $x = P^{-1}y$，则 $0 \neq x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in Q^{n \times 1}$，且

$$x^*(A \circ B)x = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i a_{ij} b_{ij} x_j$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_i a_{ij} p_{ik} p_{jk} x_i$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \bar{x}_i a_{ij} p_{ik} x_j$$

$$= \sum_{K=1}^{n} (p_{1k}\bar{x}_1, \cdots, p_{nk}x_n) A \begin{pmatrix} p_{1k}x_1 \\ \vdots \\ p_{nk}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_k A y_k = y^* A y \leqslant 0$$

这与 $A \circ B$ 是正定的相矛盾,故 A 必是正定的.

同理可证 $1° \Leftrightarrow 3°, 1° \Leftrightarrow 5°$. □

§6.3 四元数亚正定矩阵

在§5.6讨论四元数矩阵迹的不等式时,曾引入了四元数亚正定矩阵的定义(见定义5.6.1):

设 $A \in Q^{n \times n}$,若对任意 $0 \neq x \in Q^{n \times 1}$,有

$$x^* A x > 0 (\geqslant 0) \tag{6.3.1}$$

则称 A 为 Q 上的(半)亚正定阵,或简称为(半)亚正定阵. 亚正定阵与正定阵的区别在于亚正定阵并不像正定阵那样要求一定是自共轭的. 显然正定阵一定是亚正定阵,但反之不真.

为了讨论方便,对任意 $A \in Q^{n \times n}$,我们曾引入

$$R(A) = \frac{A + A^*}{2}, S(A) = \frac{A - A^*}{2}, A = R(A) + S(A) \tag{6.3.2}$$

分别称 $R(A), S(A)$ 为 A 的**自共轭分支与斜自共轭分支**.

易证如下两个命题成立.

命题 6.3.1 设 A 为 Q 上矩阵, B 为 R 上矩阵,则

$$R(A \otimes B) = R(A) \otimes B, \quad R(A \circ B) = R(A) \circ B$$

命题 6.3.2 设 A, B 均为 Q 上的矩阵,且 B 为自共轭的, $AB = BA$,则 $R(AB) = R(A)B = BR(A)$.

命题 6.3.3 设 $A,B\in Q^{n\times n}$,满足 $AB=BA,A^*B=BA^*$,则

1° $R(A)R(B),S(A)S(B)$为自共轭阵;

2° $S(A)R(B),S(B)R(A)$为斜自共轭阵.

证 由 $AB=BA,A^*B=BA^*$,易知有

$$B^*A^*=A^*B^*,B^*A=AB^*$$

因此,有

$$\begin{aligned}(R(A)R(B))^*&=(R(B))^*(R(A))^*=R(B)R(A)\\&=\frac{1}{4}(BA+BA^*+B^*A+B^*A^*)\\&=\frac{1}{4}(AB+A^*B+AB^*+A^*B^*)\\&=\frac{1}{4}(A+A^*)(B+B^*)=R(A)R(B)\end{aligned}$$

故 $R(A)R(B)$为自共轭阵.

同理可证:$S(A)S(B)$为自共轭阵,$S(A)R(B),S(B)R(A)$为斜自共轭阵. □

定理 6.3.1 设 $A\in Q^{n\times n}$,则下列命题等价:

1° A 亚正定;

2° $R(A)$正定;

3° A^{-1}存在且亚正定;

4° A^* 亚正定;

5° 对任意可逆阵$P\in Q^{n\times n}$,P^*AP 亚正定.

证 1°⇔2° 即命题 5.6.3.

1°⇒3° 首先证明:由 A 亚正定,则 A 必可逆.假若不然,则有 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$,使 $Ax=0$,从而 $x^*Ax=0$,与 A 亚正定相矛盾.下面证明 A^{-1}必为亚正定的,事实上,因为

$$(x^*A^{-1}x)^*=(A^{-1}x)^*x=(A^{-1}x)^*A(A^{-1}x)=y^*Ay$$

其中 $y=A^{-1}x$.上式表明 $x^*A^{-1}x$ 与 y^*Ay 有相同的实部.而对

任意$0\neq x\in Q^{n\times 1}$,有$y\neq 0$,故有

$$\mathrm{Re}(x^*A^{-1}x)=\mathrm{Re}(y^*Ay)>0$$

故由2°知,A^{-1}是亚正定的.

3°⇒1° 与1°⇒3°的证明是一样的.

1°⇒4° 因为

$$(x^*A^*x)^*=x^*Ax$$

上式表明,x^*A^*x与x^*Ax有相同的实部,从而

$$\mathrm{Re}(x^*A^*x)=\mathrm{Re}(x^*Ax)>0$$

故由2°即知,A^*是亚正定的.

4°⇒1° 与1°⇒4°的证明一样.

1°⇒5° 对任意$0\neq x\in Q^{n\times 1}$,令$y=Px$,因P可逆,则$0\neq y\in Q^{n\times 1}$,于是由A是亚正定的,则有

$$\mathrm{Re}(x^*(P^*AP)x)=\mathrm{Re}(y^*Ay)>0$$

故P^*AP是亚定的.

5°⇒1° 与1°⇒5°的证明一样. □

定理6.3.2 设$A\in Q^{n\times n}$,A亚正定,则

1° A的任意右特征值的实部大于零;

2° A的任意k阶主子阵A_k亦亚正定,特别地,A的主对角元的实部恒正;

3° A的关于它的k阶主子阵A_k的Schur补A/A_k必亚正定.

证 1° 设λ是A的任一右特征值,则存在$0\neq x\in Q^{n\times 1}$,使

$$Ax=x\lambda,$$

则
$$x^*Ax=x^*x\lambda$$

故
$$0<\mathrm{Re}(x^*Ax)=x^*x\mathrm{Re}(\lambda)$$

因为 $x^*x\neq 0$,从而由上式有$\mathrm{Re}(\lambda)>0$,

2° 因A亚正定,则对任意$0\neq x\in Q^{n\times 1}$,有

$$\mathrm{Re}(x^*Ax)>0$$

对任意$y_k\in Q^{k\times 1}$,$y_k=(y_{i_1},\cdots,y_{i_k})^{\mathrm{T}}$,取

$$x=(0,\cdots,0,y_{i_1},0,\cdots,0,y_{i_2},0,\cdots,0,y_{i_k},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in Q^{n\times 1}$$

则有 $y_k^* A_k y_k = x^* Ax$,从而

$$\mathrm{Re}(y_k^* A_k y_k)=\mathrm{Re}(x^* Ax)>0$$

故 A_k 是亚正定的.

3° 设 $$A=\begin{pmatrix} A_k & B \\ C & A_{n-k}\end{pmatrix}$$

由 2°及定理 6.3.1 之 3°知,A_k 与 A_{n-k}均亚正定,从而可逆,又

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} (A/A_{n-k})^{-1} & -A_k^{-1}B(A/A_k)^{-1} \\ -(A/A_k)^{-1}CA_k^{-1} & (A/A_k)^{-1}\end{pmatrix}$$

由定理 6.3.1 之 3°知,A^{-1} 是亚正定的,于是由 2°知,$(A/A_{n-k})^{-1}$与$(A/A_k)^{-1}$均为亚正定的,因此 A/A_{n-k}与 A/A_k 也是亚正定的. □

注 定理 6.3.2 之 1°的逆不成立,即特征值的实部均大于零的四元数矩阵不一定是亚正定阵.例如二阶阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$在 Q 上仅有右特征值 1,但 A 不是亚正定阵.然而如下的命题是成立的.

定理 6.3.3 设 $A\in Q^{n\times n}$,A 是正规阵(即 A 满足 $AA^*=A^*A$,见定义 4.1.5)且 A 的任一右特征值的实部都大于零,则 A 是亚正定的.

证 因 A 是正规阵,则由定理 4.1.19 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^*AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个右特征值,于是有

$$U^*R(A)U=\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1+\overline{\lambda_1}}{2},\cdots,\frac{\lambda_n+\overline{\lambda_n}}{2}\right)$$

又因为

$$\frac{\lambda_t+\overline{\lambda_t}}{2}=R(\lambda_t)>0,1\leqslant t\leqslant n$$

故 $R(A)$是正定的，从而 A 是亚正定的. □

定理 6.3.4 设 $A\in Q^{n\times n}$，则 A 是亚正定的充要条件是存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使

$$P^*AP=\operatorname{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,1+\mathrm{i}\lambda_n)\text{，其中 }\lambda_t\in R,1\leqslant t\leqslant n \tag{6.3.3}$$

证 先证充分性. 设存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$，使式(6.3.3)成立. 对任意 $0\neq x\in Q^{n\times 1}$，令 $y=P^{-1}x$，则 $0\neq y\in Q^{n\times 1}$，且

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(x^*Ax)&=\operatorname{Re}(y^*P^*APy)\\&=\operatorname{Re}(y^*\operatorname{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,1+\mathrm{i}\lambda_n)y)>0\end{aligned}$$

故 A 亚正定.

再证必要性. 设 A 亚正定，则由定理 6.3.1 之 2°知，$R(A)$正定，故由定理 4.3.2 知，存在可逆阵 $P_1\in U^{n\times n}$，使

$$P_1^*R(A)P_1=I$$

又因为 $S(A)$是斜自共轭阵，故 $P_1^*S(A)P_1$ 仍为斜自共轭阵，于是由命题 5.6.9 知，存在 $U\in U^{n\times n}$，使

$$U^*P_1^*S(A)P_1U=\operatorname{diag}(\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,\mathrm{i}\lambda_n),\lambda_t\in R,1\leqslant t\leqslant n,$$

令 $P=P_1U$，则显然 P 可逆，且

$$\begin{aligned}P^*AP&=P^*(R(A)+S(A))P\\&=P^*R(A)P+P^*S(A)P\\&=\operatorname{diag}(1+\mathrm{i}\lambda_1,\cdots,1+\mathrm{i}\lambda_n)\end{aligned}$$

这就证明了式(6.3.3)成立. □

定理 6.3.5 设 $A\in Q^{n\times n}$，A 为亚正定阵，$R(A)$的最小、最大特征值分别为 λ,μ 则对任意 $x\in Q^{n\times 1}$，有

$$\lambda(x^*x)\leqslant\operatorname{Re}(x^*Ax)\leqslant\mu(x^*x) \tag{6.3.4}$$

证 因为

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(x^*Ax)&=\frac{1}{2}(x^*Ax+x^*A^*x)\\&=x^*R(A)x\end{aligned} \tag{①}$$

由定理 4.1.14 知,存在 $U\in U^{n\times n}$,使

$$U^* R(A) U=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是$R(A)$的 n 个特征值,它们全为正实数,于是有

$$\lambda x^* x\leqslant x^* R(A)x=x^* U\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)Ux\leqslant\mu x^* x \quad ②$$

其中 λ,μ 分别是$R(A)$的最小与最大特征值. 从而由式①与②即知式(6.3.4)成立. □

关于亚正定阵,我们还有如下的**降价判定法**.

定理 6.3.6 设 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$,且 A 分块为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \beta & A_1 \end{pmatrix} \tag{6.3.5}$$

则 A 为亚正定阵的充要条件是

$$\operatorname{Re}(a_{11})>0,\ B_1=A_1-\frac{1}{4\operatorname{Re}(a_{11})}(\beta+\alpha^*)(\beta^*+\alpha)\in P_n^{>}(Q) \tag{6.3.6}$$

证 先证必要性.

当 $A=(a_{ij})$正定时,结论显然成立. 当 $A=(a_{ij})$为亚正定,且 $n>1$ 时,设 $X\in Q^{n\times 1}$,将其分块为 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ X_1 \end{pmatrix}$,$X_1\in Q^{n-1}$,则有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(X^* AX)&=\operatorname{Re}\left[(\bar{x}_1 X_1^*)\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \beta & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ X_1 \end{pmatrix}\right]\\ &=\operatorname{Re}(\bar{x}_1 a_{11} x_1+X^*\beta x_1+\bar{x}_1\alpha X_1+X_1^* A_1 X_1)\\ &=\operatorname{Re}(\bar{x}_1 a_{11} x_1)+\operatorname{Re}(X_1^*\beta x_1)\\ &\quad+\operatorname{Re}(\bar{x}_1\alpha X_1)+\operatorname{Re}(X_1^* A_1 X_1)\end{aligned} \quad ①$$

易知

$$\operatorname{Re}(\bar{x}_1 a_{11} x_1)=\operatorname{Re}(a_{11})\cdot\bar{x}_1 x_1 \quad ②$$

$$\operatorname{Re}(X_1^*\beta x_1)=\frac{1}{2}(X_1^*\beta x_1+\bar{x}_1\beta^* X_1) \quad ③$$

$$\operatorname{Re}(\bar{x}_1\alpha X_1)=\frac{1}{2}(\bar{x}_1\alpha X_1+X_1^*\alpha^*x_1) \qquad ④$$

将②、③、④代入①，在 $\operatorname{Re}(a_{11})\neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}(X^*AX)\\
&=\operatorname{Re}(a_{11})\cdot\left[\bar{x}_1+\frac{X_1^*(\beta+\alpha^*)}{2\operatorname{Re}(a_{11})}\right]\left[x_1+\frac{(\beta^*+\alpha)X_1}{2\operatorname{Re}(a_{11})}\right]\\
&\quad+\operatorname{Re}\left\{X_1^*\left[A_1-\frac{(\beta+\alpha^*)(\beta^*+\alpha)}{4\operatorname{Re}(a_{11})}\right]X_1\right\}\\
&=\operatorname{Re}(a_{11})\cdot N\left[x_1+\frac{(\beta^*+\alpha)X_1}{2\operatorname{Re}(a_{11})}\right]+\operatorname{Re}(X_1^*B_1X_1) \qquad ⑤
\end{aligned}$$

其中 B_1 如式(6.3.6)所示.

因为 A 为亚正定阵，于是我们取 $X=(1,0,\cdots,0)\in Q^{n\times 1}$，则有

$$0<\operatorname{Re}(X^*AX)=\operatorname{Re}(a_{11})$$

又对任意 $0\neq X_1\in Q^{(n-1)\times 1}$，则总存在 $x_1\in Q$，使

$$x_1+\frac{1}{2\operatorname{Re}(a_{11})}(\beta^*+\alpha)X_1=0$$

这时 $0\neq\begin{pmatrix}x_1\\X_1\end{pmatrix}=X\in Q^{n\times 1}$，使式⑤的右边第 1 项变为零，从而由式⑤，有

$$\operatorname{Re}(X_1^*B_1X_1)=\operatorname{Re}(X^*AX)>0$$

故 B_1 为亚正定阵，必要性获证.

当 $\operatorname{Re}(a_{11})>0$，且形如式(6.3.6)的 B_1 为亚正定阵时，总有⑤式成立，但⑤式右边的第 2 项 $\operatorname{Re}(X_1^*B_1X_1)\geqslant 0$. 对任意 $0\neq X\in Q^{n\times 1}$，令 $X=\begin{pmatrix}x_1\\X_1\end{pmatrix}$，$X_1\in Q^{(n-1)\times 1}$，则当 $X_1\neq 0$ 时，有 $\operatorname{Re}(X_1^*B_1X_1)>0$，从而由式⑤立得 $\operatorname{Re}(X^*AX)>0$；如果 $X_1=0$，必有 $x_1\neq 0$，这时 $\operatorname{Re}(X_1^*B_1X_1)=0$，但仍由式⑤得 $\operatorname{Re}(X^*AX)=$

$\mathrm{Re}(a_{11})\cdot N(x_1)>0$,故 A 为亚正定阵.充分性获证. □

推论 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in Q^{2\times 2}$,则 A 为亚正定阵的充要条件是

$$\mathrm{Re}(a_{11})>0,\ \mathrm{Re}(a_{11})\mathrm{Re}(a_{22})-\frac{1}{4}N(a_{21}+\overline{a}_{12})>0 \quad (6.3.7)$$

例 $A=\begin{pmatrix}2+i-j+4k & i-2j+k\\ i+3k & 4-i+j-k\end{pmatrix}$满足式(6.3.7),故 A 是亚正定阵.

利用定理 6.3.2 之 2°及定理 6.3.5,仿照定理 6.3.6 的推理方法,我们还可将定理 6.3.6 推广到一般情形.

定理 6.3.7 设 $A\in Q^{n\times n}$,A 分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},A_{11}\in Q^{k\times k},A_{22}\in Q^{(n-k)\times(n-k)} \quad (6.3.8)$$

且 $R(A_{11})=\frac{1}{2}(A_{11}+A_{11}^*)$的最大与最小特征值分别为 μ 与 λ,则 A 为亚正定阵的必要条件是:

$$A_{11},\ B_1=A_{22}-\frac{1}{4\mu}(A_{21}+A_{12}^*)(A_{21}^*+A_{12})$$

均为亚正定阵;而 A 为亚正定阵的充分条件是:

$$A_{11},\ B_2=A_{22}-\frac{1}{4\lambda}(A_{21}+A_{12}^*)(A_{21}^*+A_{12})$$

均为亚正定阵.

证 对任意

$$X=\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}\in Q^{n\times 1},X_1\in Q^{k\times 1},X_2\in Q^{(n-k)\times 1} \quad ①$$

有

$$\mathrm{Re}(X^*AX)=\mathrm{Re}\left[(X_1^*,X_2^*)\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}\right]$$

$$=\mathrm{Re}(X_1^* A_{11} X_{11}) + \mathrm{Re}(X_2^* A_{21} X_1)$$

$$+ \mathrm{Re}(X_1^* A_{12} X_2) + \mathrm{Re}(X_2^* A_{22} X_2) \quad ②$$

$$\mathrm{Re}(X_1^* A_{12} X_2) = \frac{1}{2}(X_2^* A_{12}^* X_1 + X_1^* A_{12} X_2) \quad ③$$

$$\mathrm{Re}(X_2^* A_{21} X_1) = \frac{1}{2}(X_2^* A_{21}^* X_1 + X_1^* A_{21}^* X_2) \quad ④$$

又由式(6.3.4),有

$$\lambda(X_1^* X_1) \leqslant \mathrm{Re}(X_1^* A_{11} X_1) \leqslant \mu(X_1^* X_1)$$

故当 λ,μ 均不为零时,由式②,③,④,有

$$\mathrm{Re}\,(X^* AX) \leqslant \mu \cdot N\left[X_1 + \frac{1}{2\mu}(A_{21}^* + A_{12})X_2\right]$$

$$+ \mathrm{Re}\left\{X^*\left[A_{22} - \frac{1}{4\mu}(A_{21} + A_{12}^*)(A_{21}^* + A_{12})\right]X_2\right\}$$

$$= \mu \cdot N\left[x_1 + \frac{1}{2\mu}(A_{21}^* + A_{12})X_2\right] + \mathrm{Re}(X_2 B_2 X_2) \quad ⑤$$

$$\mathrm{Re}\,(X^* AX) \geqslant \lambda \cdot N\left[X_1 + \frac{1}{2\lambda}(A_{21}^* + A_{12})X_2\right]$$

$$+ \mathrm{Re}\left\{X_2^*\left[A_{22} - \frac{1}{4\lambda}(A_{21} + A_{12}^*)(A_{21}^* + A_{12})\right]X_2\right\}$$

$$= \lambda \cdot N(X_1 + \frac{1}{2\lambda}(A_{21}^* + A_{12})X_2) + \mathrm{Re}(X_2^* B_2 X_2) \quad ⑥$$

下证充分性. 由于 A_{11} 为亚正定阵,则 $R(A_{11})$ 为正定阵,从而 $\lambda,\mu>0$,又 B_2 为亚正定阵,从而由式⑥知,$\mathrm{Re}(X^* AX)>0$,故 A 是亚正定阵.

再证必要性,若 A 是亚正定阵,则对任意 $X_1 \in Q^{k\times 1}$,$X_1 \neq 0$,取 $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$,则

$$\mathrm{Re}(X^* AX) = \mathrm{Re}\left[(X_1^*, 0)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \mathrm{Re}(X_1^* A_{11} X_1) > 0$$

故 A_{11}为亚正定阵，于是 $R(A_{11})$是正定阵，它的特征值全为正实数，这表明式⑤，⑥均成立．对任意 $0\neq X_2\in Q^{(n-k)\times 1}$，必存在 $X_1\in Q^{k\times 1}$，使

$$X_1+\frac{1}{2\mu}(A_{21}^*+A_{12})X_2=0$$

记 $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$，则由式⑤，有

$$\mathrm{Re}(X_2^*B_1X_2)\geqslant \mathrm{Re}(X^*AX)>0$$

故 B_1 是亚正定阵． □

定理 6.3.8 设 $A\in Q^{n\times n}$，且 A 分块为 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$，其中 A_{11}，A_{22}分别为方阵，则 A 亚正定$\Leftrightarrow A_{11}$亚正定，且

$$A_{22}-(\frac{A_{21}\times A_{12}^*}{2})(\frac{A_{11}+A_{11}^*}{2})^{-1}(\frac{A_{12}+A_{21}^*}{2})\text{亚正定}.$$

证 由命题 5.6.3 知，A 亚正定$\Leftrightarrow R(A)$正定．

而 $R(A)=\begin{pmatrix}R(A_{11})&B\\B^*&R(A_{22})\end{pmatrix}$，其中 $B=(\frac{A_{12}+A_{21}^*}{2})$

由命题 5.7.1 知，$R(A)$正定$\Leftrightarrow R(A_{11})$正定，且

$$R(A_{22})-B^*(R(A_{11}))^{-1}B\text{ 正定}.$$

注意到

$$\begin{aligned}&R(A_{22})-B^*(R(A_{11}))^{-1}B\\&=\frac{A_{22}+A_{22}^*}{2}-(\frac{A_{21}+A_{12}^*}{2})(\frac{A_{11}+A_{11}^*}{2})^{-1}(\frac{A_{12}+A_{21}^*}{2})\\&=R(A_{22}-(\frac{A_{21}+A_{12}^*}{2})(\frac{A_{11}+A_{11}^*}{2})^{-1}(\frac{A_{12}+A_{21}^*}{2}))\end{aligned}$$

因此由命题 5.6.3 知，

A 亚正定$\Leftrightarrow A_{11}$亚正定，且

$$A_{22}-(\frac{A_{21}+A_{12}^*}{2})(\frac{A_{11}+A_{11}^*}{2})^{-1}(\frac{A_{12}+A_{21}^*}{2})\text{亚正定}.$$ □

推论 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \beta & A_1 \end{pmatrix}\in Q^{n\times n}, A_1\in Q^{(n-1)\times(n-1)}$,则 A 亚正定$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(a_{11})>0$,且 $A_1-\frac{1}{\mathrm{Re}(a_{11})}(\beta+\alpha^*)(\alpha+\beta^*)$亚正定.

关于亚正定矩阵的乘积的亚正定性,我们有如下

定理6.3.9 设 $A\in Q^{n\times n}, B\in R^{n\times n}$,$B$ 为实 正定阵,则 AB 为 Q 上的亚正定阵的充要条件是A 为Q 上的亚正定阵.

证 先证充分性. 由 B 为R 上的亚定阵,$AB=BA$ 及命题6.3.2,有

$$R(AB)=R(A)B=BR(A) \qquad ①$$

又 A 为亚正定阵,由定理6.3.1之2°知,$R(A)$为正定阵,而 B 是 R 上亚定阵,于是由式①及定理6.2.8知,$R(AB)$是正定的.从而由定理6.3.1之2°即知AB 是亚正定的.

再证必要性. 这时仍有式①成立,且由 AB 亚正定,则 $R(AB)$正定,于是由定理6.2.4的必要性即知 $R(A)$正定,从而 A 亚正定. □

为了给出亚正定阵的和与乘积为亚正定性的另一些条件,我们引入如下概念和一个命题.

定义6.3.1 设 $A,B\in Q^{n\times n}$,若存在可逆阵 $P\in Q^{n\times n}$,使

$$P^*AP=I$$

$$P^*BP=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n),\ \mu_t\in Q, 1\leqslant t\leqslant n$$

则称 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 为矩阵B 相对于A 的**广义特征值**.

定理6.3.10 设 $A,B\in SC_n(Q)$,且 A 为正定矩阵,则 $A+B$ 为正定矩阵的充要条件是B 相对于A 的广义特征值均大于 -1.

证 由定理4.3.2知,A 为正定矩阵$\Leftrightarrow$存在可逆阵 $P_1\in Q^{n\times n}$,使

$$P_1^* AP_1 = I$$

由命题 4.3.2 知，此时 $P_1^* BP_1$ 仍为自共轭阵，于是由定理 4.1.14 知，存在 $U \in U^{n\times n}$，使

$$U^* P_1^* BP_1 U = \text{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$$

且

$$U^* P_1^* AP_1 U = I.$$

令 $P = P_1 U$，显然 P 为可逆阵，$A+B$ 为自共轭阵，且

$$\begin{aligned} P^*(A+B)P &= P^* AP + P^* BP \\ &= \text{diag}(1+\mu_1, \cdots, 1+\mu_n) \end{aligned}$$

于是由定理 4.1.14 之推论 1 知：

$A+B$ 为正定阵 $\Leftrightarrow 1+\mu_t > 0 (t=1, \cdots, n)$

$\Leftrightarrow \mu_t > -1 (t=1, \cdots, n)$

$\Leftrightarrow B$ 相对于 A 的广义特征值均大于 -1 □

定理 6.3.11 设 $A, B \in Q^{n\times n}$ 均为亚正定阵，且满足 $AB = BA, A^* B = BA^*$，则 AB 为亚正定阵 $\Leftrightarrow S(A)S(B)$ 相对于 $R(A)R(B)$ 的广义特征值均大于 -1.

证
$$\begin{aligned} AB &= (R(A)+S(A))(R(B)+S(B)) \\ &= R(A)R(B) + S(A)S(B) \\ &\quad + S(A)R(B) + S(B)R(A) \end{aligned}$$

由已知 $AB = BA, A^* B = BA^*$ 及命题(6.3.3)知，$R(A)R(B) + S(A)S(B)$ 为自共轭阵，$S(A)R(B) + S(B)R(A)$ 为斜自共轭阵，由矩阵分解的唯一性得：

$$R(AB) = R(A)R(B) + S(A)S(B)$$

$$S(AB) = S(A)R(B) + S(B)R(A)$$

设 $\lambda_t (t=1, \cdots, n)$ 是 $S(A)S(B)$ 相对于 $R(A)R(B)$ 的广义特征值，由已知 A, B 均为 n 阶正定阵及定理 6.3.1 知，$R(A)R(B)$ 均为正定阵，再由定理 6.2.14 及定理 6.3.1 知，$R(A)R(B)$ 为正定阵，从而由 $S(A)S(B)$ 为自共轭阵及定理 6.3.10，知

$R(AB) = R(A)R(B) + S(A)S(B)$ 为正定阵 $\Leftrightarrow$

$S(A)S(B)$相对于 $R(A)R(B)$的广义特征值 $\lambda_t > -1(1 \leqslant t \leqslant n)$,
因此

AB 为亚正定阵$\Leftrightarrow R(AB)$为正定阵$\Leftrightarrow S(A)S(B)$相对于 $R(A)R(B)$的广义特征值 $\lambda_t > -1(1 \leqslant t \leqslant n)$. □

关于亚正定阵的直积与圈积的亚正定阵,也有如下

定理 6.3.12 设 A 为 Q 上的矩阵,B 为 R 上的亚正定阵,则下列命题等价:

1° A 是亚正定阵;

2° $A \otimes B$ 是亚正定阵;

3° $B \otimes A$ 是亚正定阵;

4° $A \circ B$ 是亚正定阵;

5° $B \circ A$ 是亚正定阵.

证 1°⇒2° 因 A 是亚正定阵,则 $R(A)$正定,又 B 是 R 上正定阵,故由定理 6.2.15 之 2°及命题 6.3.1 知 $R(A \otimes B) = R(A) \otimes B$ 为正定阵,从而 $A \otimes B$ 是亚正定阵.

2°⇒1° 由 $A \otimes B$ 是亚正定阵,则 $R(A \otimes B)$为正定阵,又 B 为 R 上正定阵,则由命题 6.3.1 知,$R(A) \otimes B = R(A \otimes B)$,从而 $R(A) \otimes B$ 为正定阵,再由定理 6.2.15 即知 $R(A)$亦为正定阵,因此 A 为亚正定阵.

1°⇒4° 由 A 为亚正定阵,则 $R(A)$为正定阵,又 B 为实正定阵,由定理 6.2.15 知 $R(A) \circ B$ 是亚定阵,又由命题 6.3.1 知,$R(A \circ B) = R(A) \circ B$,故 $R(A \circ B)$是正定阵,从而 $A \circ B$ 是亚正定阵.

4°⇒1° 由 $A \circ B$ 为亚正定阵,则 $R(A \circ B)$为正定阵,由 B 为 R 上正定阵及命题 6.3.1 有 $R(A \circ B) = R(A) \circ B$,故 $R(A)$

$\circ B$ 为正定阵，于是由定理 6.2.15 知 $R(A)$为正定阵，从而 A 为亚正定阵.

同理可证 $1^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$，$1^\circ \Leftrightarrow 5^\circ$. □

推论 设 A 为Q 上的亚正定阵，B 是R 上的亚正定阵，则 $A \otimes R(B)$，$R(A) \otimes B$，$A \circ R(B)$，$R(A) \circ B$ 都是 Q 上的亚正定阵. □

参 考 文 献

[1] 谢邦杰．抽象代数学[M]．上海：上海科学技术出版社，1982

[2] 倪国熙．常用的矩阵理论和方法[M]．上海：上海科学技术出版社，1984

[3] 李 乔．矩阵论八讲[M]．上海：上海科学技术出版社，1988

[4] 陈龙玄，钟立敏．线性代数简明教程[M]．合肥：中国科学技术大学出版社，1989

[5] 谢邦杰，牛凤文，董乃昌．线性代数[M]．吉林：吉林大学出版社，1988

[6] 熊全淹，叶明训．线性代数[M]第三版．北京：高等教育出版社，1987

[7] 徐利治，王兴华．数学分析的方法及例题选讲(修订版)[M]．北京：高等教育出版社，1984

[8] D.S. 密特利诺维奇著：张小萍，王 龙译[M]．北京：科学出版社，1987

[9] 王伯英．控制不等式基础[M]．北京：北京师范大学出版社，1990

[10] 张禾瑞．近世代数基础[M]．北京：人民教育出版社，1983

[11] 华罗庚．数论导引[M]．北京：科学出版社，1979

[12] 李文林．数学珍宝[M]．北京：科学出版社，1998

[13] 卢开澄．组合数学(第二版)[M]．北京：清华大学出版社，1991

[14] 谢邦杰．环与体上的矩阵及两类广义 Jordan 形式[J]. 吉林大学学报(自然科学版).1979,(1):21～46

[15] 谢邦杰．体上矩阵有理简化形式与 Jordan 形式的唯一性问题[J]. 吉林大学学报(自然科学版),1978,(1):107～117

[16] 谢邦杰．Hadamard 定理在四元数体上的推广[J]. 中国科学,数学专辑(1).1979,88～92

[17] 谢邦杰．自共轭四元数矩阵的行列式的展开定理及其应用[J],数学学报,1980,23(5):668～683

[18] 谢邦杰．任意体上可中心化矩阵的行列式[J]. 吉林大学自然科学学报,1980,(3):1～33

[19] 谢邦杰．四元数自共轭矩阵与行列式[J]. 吉林大学自然科学学报,1980,(2):19～35

[20] 谢邦杰．关于自共轭四元数矩阵与行列式的几个定理[J]. 吉林大学自然科学学报,1982,(1):1～7

[21] Chen Longxuan(陈龙玄).Definition of determinant and Cramer Solutions Over the Quaternion Field. Acta Math, Sinica, New Series. 1991,7(2):171～180

[22] 陈龙玄．四元数体上的逆矩阵和重行列式的性质[J]. 中国科学(A 辑),1991,(1):23～33

[23] 陈龙玄．四元数矩阵的特征值和特征向量[J]. 烟台大学学报(自然科学与工程版),1993,(3):1～8

[24] 陈龙玄．Cayley-Hamilton 定理在四元数体上的推广[J]. 科学通报,1991(17):1291～1793

[25] 陈龙玄,侯仁民,王亮涛．四元数矩阵的 Jordan 标准形[J]. 应用数学和力学,1996,17(6):533～542

[26] 侯仁民．四元数体上的二次型问题[J]. 烟台大学学报(自然科学与工程版),1993,(4):1～4

[27] 侯仁民．四元数体上重行列式与逆矩阵的计算[J]．烟台大学学报(自然科学与工程版),1994(4):5～9
[28] 侯仁民．四元数体上的 Vandermonde 重行列式[J]．应用数学和力学,1999,20(9),1～9
[29] 陆仲坚,岑建苗．关于四元数体上重行列式以及 Schur 公式[J]．绍兴文理学院学报[J],1997,17(5):31～37
[30] 屠伯埙．强 P 除环上方阵的酉相似理论(Ⅰ)[J]．数学研究与评论,1987,7(3):393～402
[31] 屠伯埙．强 P 除环上方阵的酉相似理论(Ⅱ)[J]．数学研究与评论,1988,8(1):11～21
[32] 屠伯埙．强 P 除环上方阵的酉相似理论(Ⅲ)[J]．数学研究与评论,1989,9(1):1～8
[33] 屠伯埙．Schur 定理在四元数体上的推广[J]．数学年刊,1988,9A(2):130～138
[34] 屠伯埙．四元数矩阵的 UL 分解[J]．复旦学报(自然科学报),1989,28(2):121～128
[35] 屠伯埙．四元数体矩阵的弱直积与弱圈积[J]．复旦学报(自然科学版),1991,30(3):331～340
[36] 李文亮．四元数矩阵奇异值的一个不等式[J]．贵州大学学报(自然科学版),1993.10(3):154～159
[37] 李文亮．关于四元数自共轭矩阵行列式的一些不等式[J]．内蒙古师大学报(自然科学汉文版),1994,(1):7～12
[38] 李文亮．四元数自共轭矩阵迹的一些不等式[J]．长沙电力学院学报(自然科学版),1996,11(1):5～11
[39] 李文亮,陈泽安．四元数自共轭矩阵圈积迹的一些不等式[J]．湖南数学年刊,1996,16(1):54～59
[40] 李文亮．四元数矩阵上几个著名不等式的推广[J]．长沙电力学院学报(自然科学版),1996,11(3):268～273

[41] 李文亮．关于四元数亚正定矩阵之迹的几个不等式[J]．长沙电力学院学报(自然科学版),1997,12(3):225～330
[42] 李文亮．四元数矩阵三种积的正定性[J]．长沙电力学院学报(自然科学版),1998,13(3):229～234
[43] 李文亮．关于复亚半正定矩阵行列式的不等式[J]．长沙电力学院学报(自然科学版),2001,16(3):5～8
[44] 李文亮．关于矩阵奇异值和特征值的一些不等式[J]．昭乌达蒙族师专学报(自然科学版),1992,(1):7～21
[45] 李文亮,杨忠鹏．关于矩阵迹不等式的五个猜想[J]．昭乌达蒙族师专学报(自然科学版),1992,(4):12～18
[46] 杨忠鹏,谭思文．四元数自共轭矩阵的几个不等式[J]．东北师大学报(自然科学版),1993,(1):23～29
[47] 杨忠鹏．实四元数矩阵的 Bushell-Trustrum 不等式及其改进[J]．新疆大学学报(自然科学版),1993,10(3):46～50
[48] 杨忠鹏．与四元数矩阵迹有关的几个弱控制不等式[J]．烟台师范学院学报(自然科学版),1993,9(4):12～21
[49] 杨忠鹏．关于"四元数矩阵迹的若干性质"的注记[J]．宜春师专学报,1994,(5):34～38
[50] 席小忠．四元数矩阵迹的若干性质[J]．宜春师专学报,1992,(5):24～26
[51] 杨忠鹏．关于矩阵乘积方幂迹的不等式两个未解决的问题[J]．烟台师范学院学报(自然科学版),1994,10(4):249～253
[52] 杨忠鹏．四元数体上的 Schur 不等式及改进[J]．新疆大学学报(自然科学版),1995,12(3):27～32
[53] 杨忠鹏．实四元数体上的 Patel-Tocla 不等式及改进[J]．吉林师范学院学报,1995,16(11):4～9
[54] 杨忠鹏．一个矩阵乘积的奇异值的不等式及应用[J]．吉

林师范学院学报(自然科学版),1994,12(2):15～20
[55] 杨忠鹏.四元数矩阵乘积迹的一个不等式的改进[J].烟台师范学院学报(自然科学版),1996,12(4):245～246
[56] 谭思文.四元数矩阵优化理论的一些改进[J].吉林师范学院学报(自然科学版),1993,11(1):19～23
[57] 庄瓦金.关于四元数矩阵的奇异值分解[J].新疆大学学报(自),1987.4(1):22～28
[58] 庄瓦金.四元数矩阵的特征值与奇异值不等式[J].数学进展,1988,17(4):403～407
[59] 曹重光.关于四元数自共轭矩阵迹的几个不等式[J].数学杂志,1988,8(1):313～314
[60] 曹重光.关于四元数矩阵迹的一些不等式[J].新疆大学学报,1988,5(4):9～13
[61] 曹重光.四元数自共轭矩阵的几个定理[J].数学研究与评论,1988,(3):346～348
[62] 黄礼平.关于四元数矩阵迹的不等式[J].湖南数学年刊,1991,11(1-2):89～96
[63] 黄礼平.四元数矩阵的特征值与奇异值估计[J].数学研究与评论,1992,12(3):409～454
[64] 刘建洲,谢清明.四元数自共轭矩阵乘积的特征值的不等式[J].数学研究与评论,1992,12(3):379～383
[65] 刘建洲.四元数体上的矩阵及优化理论[J].数学学报,1992,35(6):832～838
[66] 张树青.半正定(正定)自共轭四元数矩阵之乘积的特征根[J].河北师范学院学报(自然科学版),1990,(4):18～22
[67] 张树青.关于四元数矩阵之迹的几个定理[J].数学研究与评论,1993,13(4):567～572
[68] 张树青.关于四元数矩阵乘积迹的一个不等式[J].烟台

师范学院学报(自然科学版),1995,11(1):1～4

[69] 张树青,杨国庆,吕蕴霞．关于四元数自共轭矩阵乘积迹和特征值的几个定理[J]. 数学研究与评论,1997,17(2):207～213

[70] 吕蕴霞,苑致仲,张树青．一个四元数矩阵乘积奇异值的不等式及其应用[J]. 数学研究与评论,1998,18(3):455～458

[71] 喻爱国,郭文彬．Schur 定理在四元数体上的推广[J]. 杨州师范学院学报(自然科学版),1991,11(1):1～8

[72] 喻爱国．四元数体上方阵的可对角化问题[J]. 南京师大学报,增刊(理科教学研究文集),1991,87～93

[73] 喻爱国．四元数体上的亚正定阵[J]. 淮阴师专学报,1992,14(5):19～23

[74] 喻爱国．Hamilton-Caylty 定理在四元数体上的推广[J]. 淮阴师专学报,1994,16(5):12～14

[75] 喻爱国．四元数体上矩阵的右特征值[J]. 徐州师范学院学报(自然科学版),1995,13(1):23～26

[76] 李祥明．四元数矩阵理论中的几个概念间的关系[J]. 数学学报,1998,41(3):583～588

[77] 姚海楼,平艳茹．关于自共轭四元数矩阵[J]. 河北大学学报,1995,38(2):253～259

[78] 张庆成．四元数体上重行列式的性质及其应用[J]. 数学学报,1995,38(2):253～259

[79] 李晓沛,顾广泽,杨红伏,王仙桃．关于自共轭四元数矩阵特征值的一个不等式[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2000,27(3):6～8

[80] 杨尚骏,张晓东．四元数方阵的拟行列式及拟特征多项式[J]. 安徽大学学报(自然科学版),1994,(12):1～4

[81] 王文丽．四元数矩阵两个不等式的改进[J]．内蒙古师大学报(自然科学汉文版),1990(2):23～24

[82] 冯海亮,伍俊良．四元数矩阵特征值的一些估界定理[J]．重庆师范学院学报(自然科学版),1997,14(2):48～50

[83] 郭时光．四元数方阵的正定性[J]．四川轻化工学院学报,1999,12(1):1～5

[84] 郭时光．四元数矩阵的酉相合[J]．四川轻化工学院学报,1999,12(3):1～8

[85] 陆德安．关于四元数的若干问题[J]．上海技术师范学院学报,1990,10(4):47～50

[86] 赵义发．四元数除环定义在代数上的一致性[J]．保定师专学报(自然科学版),1992,(2):31～32

[87] 李　莉．四元数在三维空间的几何表示[J]．辽宁师范大学学报,1989,(1):72～76

[88] 肖尚彬．四元数矩阵的乘法及其可易性[J]．力学学报,1984,(2)

[89] 肖尚彬．多刚体开链系统运动的四元数算法[J]．固体力学学报,1985,(4)

[90] 张劲夫,蔡泰信．对偶四元数及其在刚体定位中的应用[J]．黄淮学刊,1993,9(4):27～30

[91] Бранеч,В.Н.Щмырдевескuй,И.П. 四元数在刚体定位问题中的应用[M]．北京:国防工业出版社,1997

[92] 王庆贵．四元数变换及其在空间机构位移分析中的应用[J]．力学学报,1983,(1):54～55

[93] 王庆贵．四元数矩阵在研究多刚体相对运动中的应用[J]．北方交通大学学报,1987,(1):52～62

[94] 王庆贵．四元数乘法的结构张量与四元数矩阵的张量表示[J]．力学学报,1995,27(6):702～710

[95] 丁光涛．偏振光的四元数表示[J]．黄淮学刊,1993,9(1):43～48
[96] 丁光涛．偏振器件的四元数表示[J]．黄淮学刊,1993,9(2):23～30
[97] Shocmake K. A nimating rotation with quatemion curves, computer Gaphics. 1985,19(3)
[98] 施开达,马利庄．试论四元数与旋转矩阵的关系及其在计算机图形学中的应用[J]．舟山师专学报(自然科学版),1997,(1):7～13
[99] 张国良,曾静,邓方林．用四元数法提取加速度计三轴转台测试中的动态误差量[J]．中国惯性技术学报,2000,8(3):70～73
[100] 陈万春,肖业伦．矢阵与四元数的关系及其在飞行力学中的应用[J]．宇航学报．1997,(1):23～30
[101] 陈万春,肖业伦,赵丽红,邹晖．四元数的核心矩阵及其在航天器姿态控制中的应用[J]．航空学报,2000,21(5):389～392
[102] Anderson. lnrariant nonnal models [J]. Auu Statist, 1975,(3):132～154
[103] 滕成业,李绍明．四元数矩阵微分及其在精确分布上的应用[J]．中山大学学报(自然科学版),1999,38(3):12～16
[104] 李绍明,滕成业,王　琪．四元数矩阵变元的带状多项式及其性质[J]．中山大学学报(自然科学版),2000,39(4):19～22
[105] 吴光磊,陈维桓．一个矩阵不等式及其几何应用[J]．数学学报,1988,31(3):348～355
[106] 邓　辉．若干矩阵不等式及 Riemann 对称空间截面曲率估计[J]．数学学报,1991,34(3):299～308

[107] 席博彦．关于矩阵迹的 Bellman 不等式[J]．新疆大学学报(自)，1991，8(4)：34～36

[108] 席博彦．关于四元数矩阵乘积的奇异值不等式[J]．数学研究与评论，1992，(1)：91～94

[109] 冯肇华．四元数矩阵的秩[J]．广东教育学院学报，1997，(2)：40～43

[110] 谢德祥．对四元数变函数的探索[J]．桂林地区教育学院学报，1988，(1)：49～52

[111] 王建平．关于 Hölder 不等式[J]．数学学报，1983，(3)：24～28

[112] 王挽澜，林祖成．加强琴生不等式的一个猜想[J]．成都大学学报(自然科学版)，1991，(4)

[113] 张运筹．微微对偶不等式[J]．数学通讯，1980(4)

[General Information]
书名=四元数矩阵
作者=李文亮著
页数=330
SS号=10975509
DX号=
出版日期=2002年06月第1版
出版社=国防科技大学出版社